

## Parcours :

- 1991–2016 : Bretagne
- 2016–19 : Thèse à l'Université Paris-Saclay.  
Directeur de Thèse : Jacques Smulevici.
- 2019–21 : postdoctorat en Grande-Bretagne (Cambridge)

## Domaine de recherche : Équations aux dérivées partielles

- EDPs hyperboliques, équations cinétiques, relativité générale.
- Systèmes équation de transport/équations d'ondes.
- Vlasov-Maxwell (physique des plasmas),  
Einstein-Vlasov (dynamique stellaire, cosmologie)...  
Comportement asymptotique des solutions de l'équation Vlasov, pour des particules de masse nulle, à l'extérieur d'un trou noir.

Equation de Vlasov sans masse sur l'espace-temps de Minkowski  $\mathbb{R}^{1+3}$ 

- Description statistique de l'évolution d'un ensemble de particules de masse nulle, qui ne sont soumises à aucune force. Pas de collisions.
- Les particules vont à la vitesse de la lumière et suivent un mouvement rectiligne et uniforme

$$t \mapsto x + t \frac{v}{|v|}, \quad v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

- Dynamique décrite par la fonction de distribution  $f(t, x, v)$ , définie sur l'espace des phases  $(t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_x^3 \times (\mathbb{R}_v^3 \setminus \{0\})$ .
- Nombre de particules à l'instant  $t$ , ayant une position  $x \in X \subset \mathbb{R}^3$  une vitesse  $v \in V \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  :

$$\int_{x \in X} \int_{v \in V} f(t, x, v) dx dv.$$

- $f$  est constante le long des trajectoires

$$f\left(t, x + t \frac{v}{|v|}, v\right) = f(0, x, v) \quad \Leftrightarrow \quad f(t, x, v) = f\left(0, x - t \frac{v}{|v|}, v\right).$$

- $f$  est solution de

$$\mathbf{T}(f) := \partial_t f + \sum_{i=1}^3 \frac{v^i}{|v|} \partial_{x_i} f = 0.$$

## Méthode des champs de vecteurs

Comportement asymptotique de  $f$ ?

$$\int_{\mathbb{R}_v^3} f(t, x, v) dv = \int_{\mathbb{R}_v^3} f\left(0, x - t \frac{v}{|v|}, v\right) dv \leq \frac{\text{Constante}}{(1+t)^2}.$$

Méthode peu robuste : difficile à utiliser dans un cadre non-linéaire (si les particules sont soumises à une force).

**Méthode des champs de vecteurs** : Développée pour les équations d'ondes par Klainerman (1985) puis adaptée par Fajman–Joudioux–Smulevici (2015). Elle est basée sur

- **Commutateurs** (champs de vecteurs/dérivées). Exploiter les symétries des équations, liées à celles de l'espace-temps.  
Translations, rotations, rotations hyperboliques (boosts de Lorentz).
- **Inégalités d'énergie**. Contrôler des normes  $L^p$  (à poids) des solutions.
- **Inégalités de Sobolev à poids**. Estimations de décroissance ponctuelles.

**Commutateurs** : Lift complets  $\widehat{Z}$  des champs de Killing conformes  $Z$ .

- translations  $\widehat{\partial}_{x^\mu} = \partial_{x^\mu},$
- rotations  $\widehat{\Omega}_{ij} = x^i \partial_{x^j} - x^j \partial_{x^i} + v_i \partial_{v_j} - v_j \partial_{v_i},$
- Lorentz boosts  $\widehat{\Omega}_{0k} = t \partial_{x^k} + x^k \partial_t + |v| \partial_{v_k},$
- scaling  $\widehat{S} = t \partial_t + r \partial_r + \sum_i v_i \partial_{v_i}.$

Si  $\mathbf{T}(f) = 0$  alors  $\mathbf{T}(\widehat{Z}f) = 0.$

**Loi de conservation** :

$$\int_{\mathbb{R}_x^3} \int_{\mathbb{R}_v^3} f(t, x, v) dx dv = \int_{\mathbb{R}_x^3} \int_{\mathbb{R}_v^3} f(0, x, v) dx dv.$$

**Inégalité de Klainerman-Sobolev** :

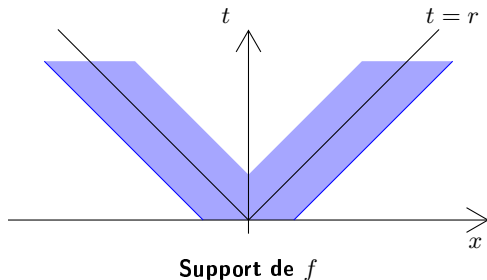
$$\int_{\mathbb{R}_v^3} |f|(t, x, v) dv \leq \frac{\text{Constante}}{(1+t+r)^2(1+|t-r|)} \sum_{|I| \leq 3} \int_{\mathbb{R}_x^3} \int_{\mathbb{R}_v^3} |\widehat{Z}^I f|(t, x, v) dx dv.$$

$r = |x|$  et  $\widehat{Z}^I = \widehat{Z}^{I_1} \dots \widehat{Z}^{I_n}$  : composée par  $|I| = n$  commutateurs.

**Conséquences :**  $\int_x \int_v |\widehat{Z}^I f|(t, x, v) dx dv = \text{constante}$  et

$$\int_{\mathbb{R}_v^3} |f|(t, x, v) dv \leq \frac{\text{Constante}}{(1+t+r)^2(1+|t-r|)}.$$

La décroissance en  $t-r$  peut être améliorée. Si  $f(0, \cdot, \cdot)$  à support compact :



Utiliser les quantités conservées le long des trajectoires (moment angulaire,  $x_1|v| - tv_1$  etc...) permet

- d'améliorer la décroissance en  $t-r$
- améliorer la décroissance en  $t+r$  pour  $\int_v (|v| - v \cdot \partial_r) |f| dv$ .

## L'équation de Vlasov à l'extérieur d'un trou noir

**Motivations** : Etudier des solutions de type trous noirs pour le système d'Einstein-Vlasov.

**Prérequis** : Comprendre le comportement en temps long des solutions de l'équation de Vlasov, pour des particules de masse nulle, sur un trou noir fixé.

Les particules suivent alors les géodésiques isotropes du trou noir (variété Lorentzienne)

**Extérieur d'un trou noir de Schwarzschild de masse  $M > 0$**  : Système de coordonnées sphériques  $(t, r, \theta, \varphi)$ , où  $r > 2M$ ,

$$\text{Métrique : } g = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2)$$

- $r = 2M$  : Horizon des événements.
- Espace-temps asymptotiquement plat :  $g \rightarrow$  "métrique de Minkowski" pour  $r \rightarrow +\infty$ .
- Symétries : Rotations, translation temporelle.

## Difficultés

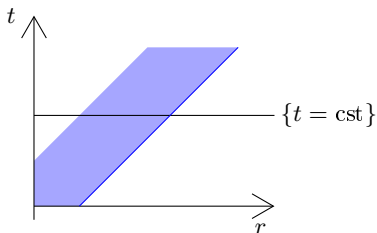
### La méthode des champs de vecteurs sur Minkowski reposait sur

- Le grand nombre de commutateurs (reliés aux symétries de Minkowski).
- Décroissance temporelle obtenue par les commutateurs et les constantes du mouvement ayant des poids en  $t$ .

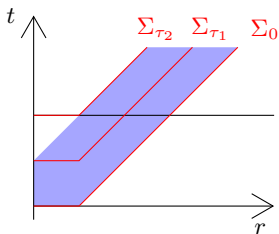
Sur Schwarzschild :

- 1) Beaucoup moins de commutateurs : Lift complet de  $\partial_t$  et des rotations.
- 2) Bien moins de quantité conservées le long des trajectoires (énergie totale et moment angulaire)
- 3) Moins de normes  $L^1$  à poids contrôlés. Pas de poids en  $t$ , décroissance temporelle ?
- 4) Pas de loi de conservation pour  $\partial_r f$ .
- 5) Trajectoires piégées en  $r = 3M$  : particules ne rentrant pas dans le trou noir et ne s'échappant pas à l'infini.
- 6) La norme  $L^1$  conservée n'est pas bonne près de  $r = 2M$ .

## Décroissance en temps : Bien choisir le feuilletage.



Nombre de particules traversant  $\{t = \text{cst}\} = \int_x \int_v f(t, x, v) dv dv = \text{Constante}$



Nombre de particules traversant  $\Sigma_\tau$  ? 0 si  $\tau \geq \tau_2$ .



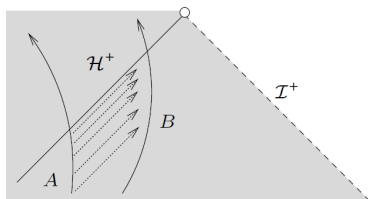
## Problème près de l'horizon

La quantité conservée est du type

$$\int_x \int_v a(r, v) f(t, x, v) dv dx, \quad a(r, v) > 0, \quad \lim_{r \rightarrow 2M} a(r, v) = 0.$$

En exploitant l'effet Doppler, on peut en fait montrer que si  $f$  est supportée dans  $]2M, 2M + \epsilon]$ , alors

$$\int_x \int_v f(t, x, v) dv dx \leq e^{-\kappa t} \int_x \int_v f(0, x, v) dv dx.$$



Si  $A$  franchit l'horizon des événements à l'instant 0 et  $B$  à l'instant  $\tau > 0$ , la fréquence à laquelle  $B$  reçoit le signal émis par  $A$  est décalé vers le rouge d'un facteur  $e^{-\kappa\tau}$ .