

# 2<sup>me</sup> journée des doctorantes et doctorants en analyse de l'IRMAR

7 juin 2018, salle 004-006

## Programme

9h45-10h30 : **Joackim Bernier**

*Pourquoi l'équation de Schrödinger non linéaire discrète semble-t-elle admettre des ondes progressives solitaires ?*

10h30-11h15 : **Duc Tho Nguyen**

*Boundary effects on the magnetic Hamiltonian Dynamics in two dimensions*

11h15-12h00 : **Florian Lemonnier**

*Étude du comportement en temps long d'EDP par des méthodes probabilistes*

*Déjeuner*

14h00-14h45 : **Kévin Le Balc'h**

*Peut-on trouver un contrôle cubique à l'équation de la chaleur ?*

14h45-15h30 : **Zoïs Moitier**

*Asymptotique des résonances dans un micro-résonateur optique*

*Pause café*

## Résumés

**Joackim Bernier** : *Pourquoi l'équation de Schrödinger non linéaire discrète semble-t-elle admettre des ondes progressives solitaires ?*

Certaines équations de Schrödinger non linéaires admettent pour solutions des ondes progressives solitaires. On s'intéressera à l'existence et à la stabilité de telles solutions pour l'analogue discret de ces équations. Je vous présenterai comment la discrétisation de la non linéarité induit une inhomogénéité rendant impossible, a priori, l'existence d'ondes progressives. Enfin, je vous expliquerai comment les instabilités qu'elle engendre peuvent être contrôlées pour permettre le déplacement, sur de longues distances, d'ondes solitaires approchées.

**Duc Tho Nguyen** : *Boundary effects on the magnetic Hamiltonian Dynamics in two dimensions*

In this talk, I will present the Hamiltonian dynamics of a charged particle submitted to a pure magnetic field in a bounded domain. There are two parts in my presentation. In the first part, I provide the conditions on the magnetic field in a neighbourhood of the boundary to ensure the confinement of the particle. In the second part, I prove a formula for the scattering angle between the in-coming and out-going direction of the particle in the case of radial magnetic fields.

**Florian Lemonnier** : *Étude du comportement en temps long d'EDP par des méthodes probabilistes*

Dans cet exposé, on s'intéresse à l'EDP de Hamilton-Jacobi-Bellman :

$$\begin{cases} f(x, \partial_x u(t, x) \sigma(x)) + \partial_t u(t, x) + \partial_x u(t, x) b(x) + \frac{1}{2} \text{tr}(\partial_{xx}^2 u(t, x) \sigma(x) \sigma(x)^*) = 0 \\ u(T, x) = g(x) \end{cases}$$

et notamment à son comportement en temps long, c'est-à-dire lorsque le temps de la condition terminale  $T$  tend vers l'infini. Sous certaines hypothèses, on peut relier cette EDP à une EDS rétrograde, une EDS dont on impose la condition terminale, et non la condition initiale. C'est l'étude du comportement en temps long de cette EDSR qui nous permettra ici d'obtenir des informations sur celui de l'EDP ci-dessus. Tout ceci fait l'objet d'un travail mené avec mon directeur de thèse, Ying Hu.

**Zoïs Moitier** : *Asymptotique des résonances dans un micro-résonateur optique*

Je m'intéresse aux fréquences de résonances de cavités optiques bidimensionnelles présentes dans certains micro-résonateurs optiques, et plus particulièrement aux modes de galerie, des modes localisés à la frontière de la cavité. Dans le cas d'un disque d'indice optique constant, on connaît un développement asymptotique des résonances quand le nombre d'oscillations angulaires tend vers l'infini. Dans un premier temps, je vais montrer une méthode qui permet de calculer des formules similaires quand on est toujours sur un disque, mais que l'indice optique n'est plus constant. Et dans un deuxième temps, je vais étendre ces formules à des cavités de forme plus générale à l'aide d'une méthode BKW.

**Kévin Le Balc'h** : *Peut-on trouver un contrôle cubique à l'équation de la chaleur ?*

Le problème de la contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur avec contrôle localisé s'énonce comme suit. Soit  $T > 0$ ,  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Omega$  un ouvert connexe borné régulier de  $\mathbb{R}^N$ , et  $\omega$  un ouvert non vide contenu dans  $\Omega$ . Etant donnée n'importe quelle condition initiale  $y_0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R})$ , peut-on trouver un contrôle  $h \in L^2((0,T) \times \Omega; \mathbb{R})$  (localisé) tel que la solution  $y$  de

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = h1_\omega & \text{dans } (0,T) \times \Omega, \\ y = 0 & \text{sur } (0,T) \times \partial\Omega, \\ y(0, \cdot) = y_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (\text{Heat})$$

vérifie  $y(T, \cdot) = 0$  ?

La réponse est : OUI! Ce problème a été résolu de manière indépendante avec des inégalités de Carleman dans  $L^2$  par Gilles Lebeau, Luc Robbiano en 1995 et Andrei Fursikov, Oleg Imanuvilov en 1996.

Une question qui est arrivée naturellement au cours de mes travaux de thèse est la suivante. Dans le problème précédent, **est-ce que le contrôle  $h$  peut-être choisi comme la puissance  $n$ -ième ( $n \geq 1$ ) d'une fonction régulière**, autrement dit, peut-on écrire  $h = g^n$  avec  $g$  une fonction régulière ?

Le cas  $n$  pair peut vite être écarté par un simple principe du maximum en considérant des données initiales positives (non nulles).

Pour le cas  $n$  impair, la réponse est : OUI! La preuve est basée sur deux principaux ingrédients que j'expliquerai. Premièrement, on démontrera des nouvelles inégalités de Carleman  $L^p$  ( $2 \leq p < \infty$ ) obtenues à l'aide des traditionnelles inégalités de Carleman  $L^2$  et des arguments de régularité maximale. Puis, on revisitera la méthode de dualité de Jacques-Louis Lions : la Hilbert Uniqueness Method dans un cadre  $L^p$  ( $2 \leq p < \infty$ ) pour construire des contrôles dont la racine  $n$ -ième soit régulière.

J'expliquerai enfin l'application de ce résultat pour le problème de la contrôlabilité à zéro d'un système  $2 \times 2$  de réaction-diffusion avec couplage nonlinéaire. Ce travail est contenu dans la pré-publication [1].

## Références

- [1] Kévin Le Balc'h. Null-controllability of two species reaction-diffusion system with nonlinear coupling : a new duality method. arXiv e-print 1802.09187, 2018.