

# Table des matières

<b>1</b>	<b>La fonction racine carrée</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>La fonction valeur absolue</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>La fonction carrée</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Les fonctions trigonométriques</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>Identité remarquables</b>	<b>8</b>
<b>6</b>	<b>Triangle de Pascal</b>	<b>8</b>
<b>7</b>	<b>Règles de calcul</b>	<b>9</b>
7.1	Sur les puissances . . . . .	9
7.2	Sur le module/valeur absolue . . . . .	10
7.3	Sur l'argument . . . . .	10
<b>8</b>	<b>Les limites</b>	<b>10</b>
8.1	Les formes indéterminées . . . . .	10
8.2	Les limites classiques à connaître . . . . .	11
8.3	Quelques techniques pour calculer des limites . . . . .	11
<b>9</b>	<b>Polynômes irréductibles</b>	<b>13</b>
9.1	Dans $\mathbb{C}[X]$ . . . . .	13
9.2	Dans $\mathbb{R}[X]$ . . . . .	14
<b>10</b>	<b>Décomposition en éléments simples</b>	<b>15</b>
10.1	Principe . . . . .	15
10.2	Comment trouver ces constantes? . . . . .	16
<b>11</b>	<b>Rédaction</b>	<b>19</b>
<b>12</b>	<b>Calcul d'intégrales</b>	<b>20</b>
12.1	Primitives usuelles (à connaître!) . . . . .	20
12.2	Intégration par parties . . . . .	21
12.3	Changement de variable . . . . .	22

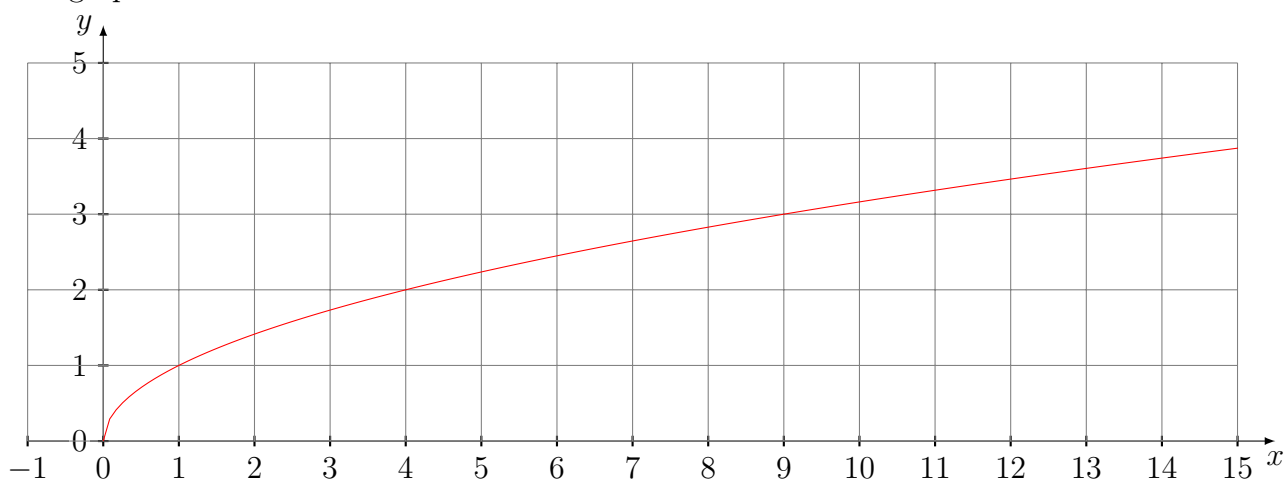
# 1 La fonction racine carrée

La fonction "racine carrée" est **définie sur**  $\mathbb{R}^+$ . Cela signifie qu'elle ne peut "manger" que des nombres **positifs**. Par exemple,  $\sqrt{-3}$  n'a pas de sens dans  $\mathbb{R}$ . De plus, elle est à valeur dans  $\mathbb{R}^+$ . Cela signifie que  $\sqrt{x}$  est toujours positif, quelque soit  $x \in \mathbb{R}^+$ . En langage mathématiques, on l'écrit comme ceci :

$$\sqrt{\cdot} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} .$$

Quand on a affaire à une racine carrée, il faut toujours vérifier que ce qu'il y a à l'intérieur de la racine est positif! (Exemple : si on écrit  $\sqrt{x-1}$ , il faut bien avoir en tête et il faut écrire que l'on ne considère cette expression que pour des  $x$  plus grand que 1).

Voici le graphe de la fonction racine :



On "voit" sur son graphe qu'elle est croissante (**Exercice : montrer le!**).

On peut également écrire que  $\sqrt{x} = x^{1/2}$ . Ainsi, la fonction racine carrée respecte ces règles de calculs, comme toutes les fonctions "puissance" :

$$\begin{aligned} \sqrt{ab} &= \sqrt{a} * \sqrt{b} \\ \sqrt{a/b} &= \sqrt{a}/\sqrt{b} \end{aligned}$$

Attention : erreur à ne pas faire :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b} \text{ (**Exercice : montrer le!**)}$$

On a également cette égalité :  $\sqrt{a} * \sqrt{a} = a$  (**Exercice : montrer le!**)

Ces égalités nous permettent de simplifier des racines carrées. Par exemple :

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 * 5} = \sqrt{4} * \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

Exercice : Montrer que :

- a)  $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
- b)  $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
- c)  $\sqrt{162} = 9\sqrt{2}$

On voit grâce à cette égalité que la fonction racine carrée est la fonction réciproque de

la fonction  $g$  définie ainsi :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} .$$

Attention,  $g$  est différente de la fonction "carrée" habituelle car elles n'ont pas le même domaine de définition ! La fonction "carrée" habituelle est définie sur tout  $\mathbb{R}$  alors que  $g$  **n'est définie que sur  $\mathbb{R}^+$**  : cela signifie que,

pour tout  $x$  **POSITIF**, on a  $\sqrt{x^2} = x$  et  $(\sqrt{x})^2 = x$ .

ATTENTION : La première identité n'est plus valable si  $x$  **EST NÉGATIF** : en effet, prenez par exemple :  $x = -3$ . Alors,  $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \neq -3$ . Pour donner une identité similaire mais qui marcherait pour tout  $x$  réel, on introduit une nouvelle fonction : la fonction valeur absolue.

## 2 La fonction valeur absolue

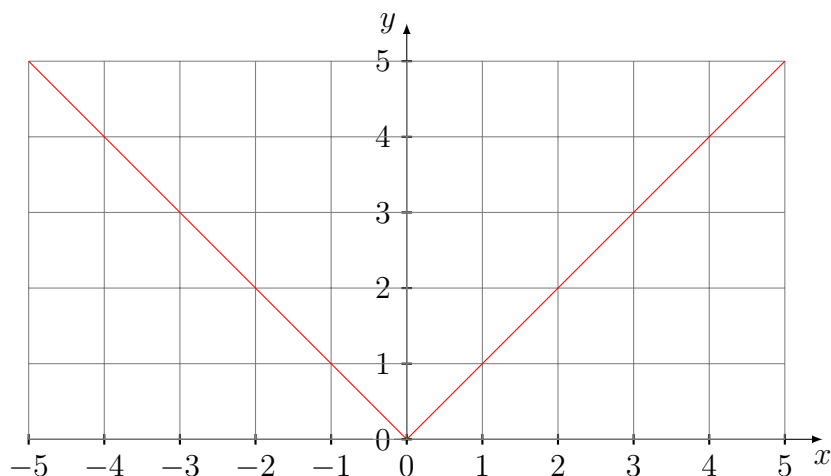
Pour un réel  $x$ , on définit sa valeur absolue comme suit

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases} .$$

La valeur absolue de  $x$  est donc toujours positive, peu importe le réel choisi, et on peut la relier aux fonctions racine et carré précédente par la formule

$$|x| = \sqrt{x^2}, \text{ pour tout } x$$

Voici son graphe :



Exemple :

- $|-5| = 5$
- $|10^2| = 10^2$
- $|-2054135,56423| = 2054135,56423$

Si maintenant par exemple on vous demande de donner pour tout  $x$  réel, la valeur absolue de  $(x - 21)$ , il faut distinguer deux cas :

a) 1er cas : si  $x - 21$  est positif (c'est-à-dire si  $x$  est plus grand que 21), alors

$$|x - 21| = x - 21,$$

car la valeur absolue d'un nombre positif est lui-même (Voir la définition).

b) 2ème cas : si  $x - 21$  est négatif (c'est-à-dire si  $x$  est plus petit que 21), alors

$$|x - 21| = -(x - 21) = -x + 21,$$

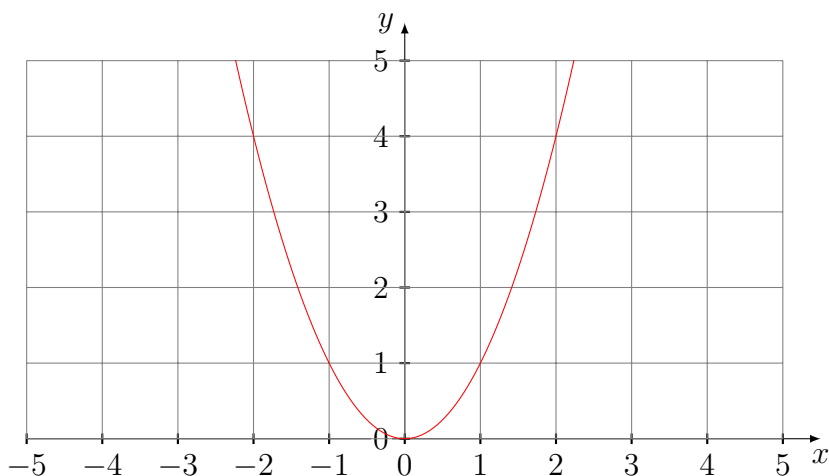
car la valeur absolue d'un nombre négatif est son opposé (Voir la définition).

### 3 La fonction carrée

La fonction "carrée" est **définie sur**  $\mathbb{R}$ . Cela signifie qu'elle ne peut "manger" n'importe quel réel. De plus, elle est à valeur dans  $\mathbb{R}^+$ . Cela signifie que  $x^2$  est toujours positif, quelque soit  $x \in \mathbb{R}$ .

En langage mathématiques, on l'écrit comme ceci :

$$(\cdot)^2 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 \end{array} .$$



On a que la fonction carrée est **décroissante** sur  $] - \infty, 0]$  et **croissante** sur  $[0, +\infty[$ . Ainsi, quand on manipule des inégalités par exemple, que l'on aimerait passer au carré, il faut être vigilant.e! Par exemple :

$$-3 < 2 \text{ mais } (-3)^2 > 2^2$$

$$-4 < 5 \text{ mais } (-4)^2 < 5^2$$

$$-4 < -2 \text{ mais } (-4)^2 > (-2)^2$$

$$3 < 6 \text{ mais } 3^2 < 6^2$$

Ces quatre petits exemples sont là pour vous montrer qu'il faut vraiment faire attention lorsque l'on manipule des carrés. Les deux premiers nous disent que lorsque un nombre est négatif, et l'autre est positif, on ne peut **rien** dire sur leur carré. Pour comparer le carré de deux nombres, il faut alors vérifier au préalable qu'ils sont bien tous les deux positifs, ou tous les deux négatifs.

Par exemple, résolvons l'inégalité

$$\sqrt{x-1} < x-3. \quad (\text{I})$$

L'objectif est de retirer la racine, en élevant au carré de chaque côté. Cependant, il ne faut pas le faire trop vite :

1. Il faut vérifier que ce qui est écrit a du sens : c'est le cas pour tous les  $x$  tels que le contenu de la racine soit positif, c'est à dire, ici  $x \geq 1$ . Ainsi, pour  $x < 1$ , l'inégalité n'a aucun sens, puisque l'un des deux termes n'existe pas.
2. Comme on en a parlé au-dessus, on ne saura plus comparer les deux carrés, si les nombres ne sont pas de même signe. Puisque  $\sqrt{\text{truc}}$  donne une valeur positive (ou nulle), il nous faut savoir quand est-ce que le second terme est également positif. Ici,  $x-3 \geq 0$  revient à  $x \geq 3$ . On peut donc en déduire, que lorsque  $x < 3$ , l'inégalité n'est pas vérifiée : puisqu'alors celle-ci s'écrit "quelque chose de positif < quelque chose de négatif".
3. Enfin, on va élever au carré, pour les valeurs de  $x$  convenables, c'est à dire telles que :
  - la racine existe, ici  $x > 1$
  - les deux côtés sont de même signe, ici  $x > 3$ .

Ainsi, pour  $x > 3$ , l'inégalité (I) revient à

$$x-1 < (x-3)^2. \quad (\text{I}')$$

Puis, il ne reste qu'à mener la résolution, via les connaissances sur les polynômes du second degré.

Une fois cette résolution terminée, il est obligatoire de faire le bilan :

- L'inéquation (I) n'a de sens que pour  $x > 1$  (étape 1)
- Pour  $x < 3$ , l'inéquation est fautive (étape 2).
- Pour  $x > 3$ , l'inéquation est vraie, si et seulement si  $x \in [a, b]$ , où  $[a, b]$  est l'intervalle solution de (I').

Ici, l'ensemble solution est (vérifiez-le)

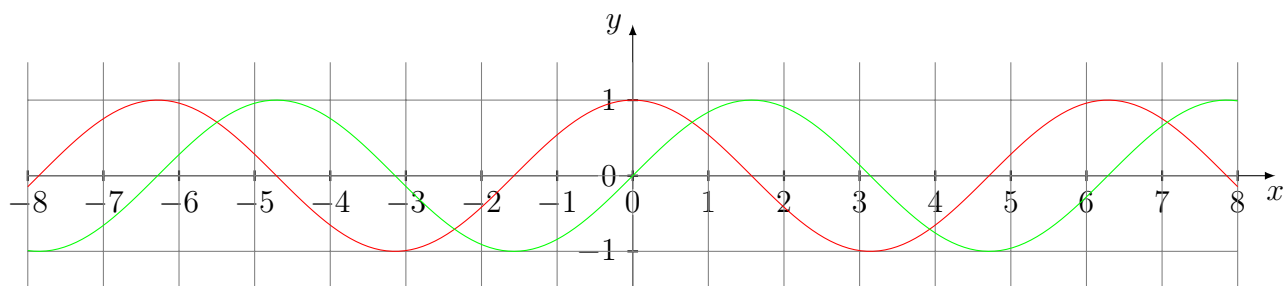
$$S = ]5, +\infty[.$$

## 4 Les fonctions trigonométriques

Les fonctions cos et sin sont définies, et dérivables sur  $\mathbb{R}$ . De plus, on a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$\sin'(x) = \cos(x) \quad \cos'(x) = -\sin(x).$$

Certaines valeurs sont à connaître (celles que l'on lit sur le cercle trigonométrique), en  $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2, \pi$  etc. Ci-dessous, les graphes des deux fonctions.

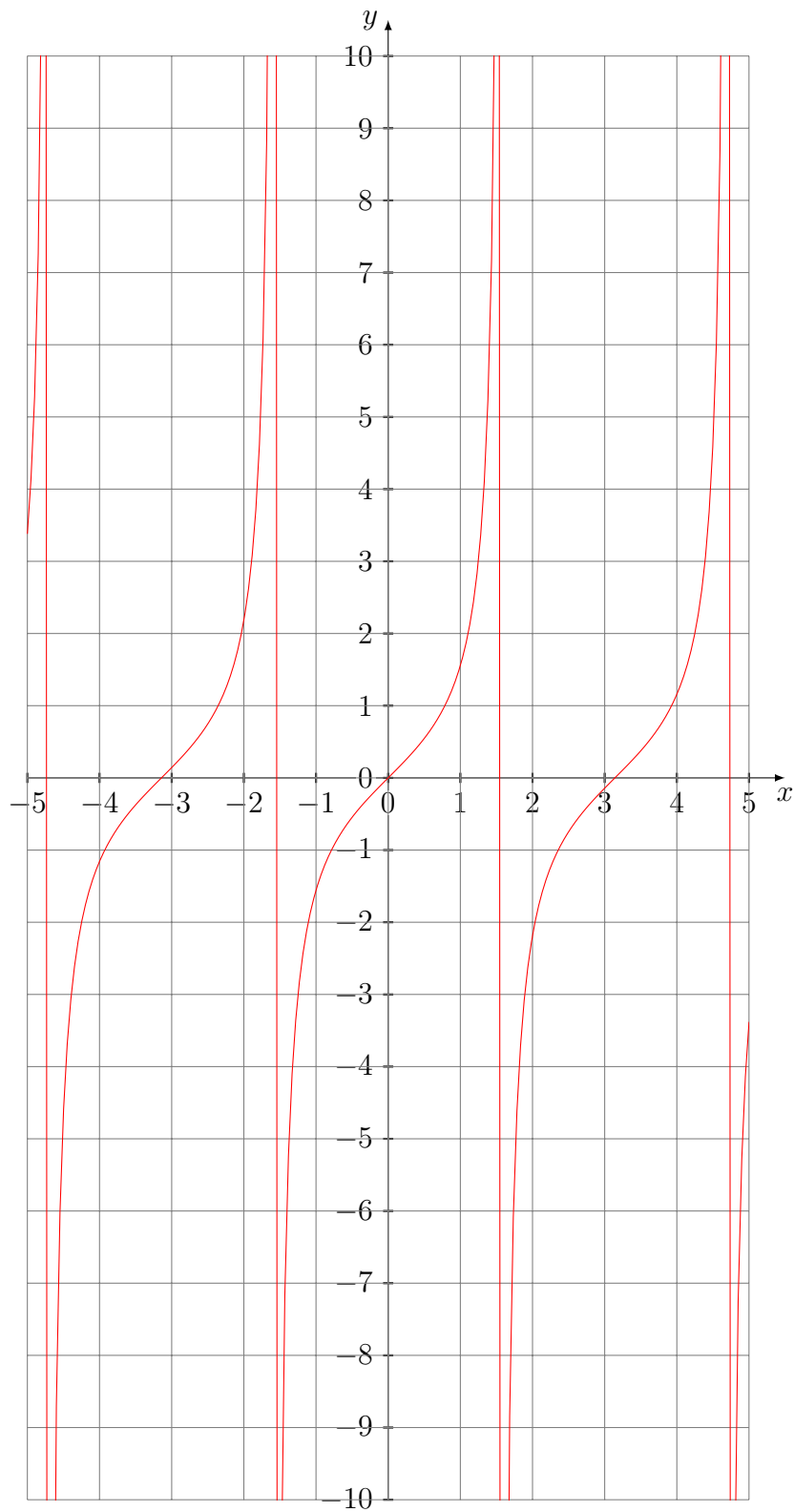


Les fonctions cos et sin sont  $2\pi$ -périodiques, bornées (elles évoluent entre -1 et 1) et n'admettent pas de limites en  $\pm\infty$ .

La fonction tan, que l'on définit par la relation suivante, à, partir de cos et sin

$$\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Pour que cette relation ait du sens (c'est à dire,  $\cos x \neq 0$ ), il faut éviter les valeurs  $\pi/2 [2\pi]$ . Elle est également périodique, de période  $\pi$ .



$\tan$  n'admet pas non plus de limite en  $\pm\infty$  et est dérivable sur son ensemble de définition, c'est à dire sur

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi \right[ ,$$

de dérivée  $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ .

## 5 Identité remarquables

**TRÈS IMPORTANT** : Si vous ne vous rappelez plus des identités remarquables, pas de panique : vous pouvez les retrouver toutes seules !

- $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a * a + a * b + b * a + b * b = a^2 + 2ab + b^2$

- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  (**Exercice : montrer le !**)

- $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$  (**Exercice : montrer le !**)

**Exercice :**

Montrer que :

a)  $(2x + 5)^2 = 4x^2 + 20x + 25$

b)  $(-3x + 7)^2 = 9x^2 - 42x + 49$

c)  $(3x + \sqrt{5})(3x - \sqrt{5}) = 9x^2 - 5$

## 6 Triangle de Pascal

Le triangle de pascal est un outil très utile pour pouvoir développer n'importe quelle expression du type  $(a + b)^n$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ . Il s'écrit ainsi :

$n = 0$				1												
$n = 1$				1		1										
$n = 2$				1		2		1								
$n = 3$				1		3		3		1						
$n = 4$				1		4		6		4		1				
$n = 5$				1		5		10		10		5		1		
$n = 6$				1		6		15		20		15		6		1

### 1) Comment le fabriquer ?

Les deux premières lignes sont à connaître : elles ne sont constituées que de 1.

Pour fabriquer la troisième ligne, on commence toujours celle-ci par un 1. Puis on regarde les deux chiffres écrits au-dessus : on a un 1 et un 1. On les additionne : cela donne 2. On finit la ligne par un 1. Pour la quatrième ligne on fait de même : on commence par écrire un 1. On regarde les deux chiffres au dessus, et on les additionne :  $1 + 2 = 3$ . On écrit alors le chiffre 3. On continue. On regarde les deux chiffres au dessus, et on les additionne :  $2 + 1 = 3$ . On finit notre ligne avec un 1. Pour la cinquième ligne on continue : On commence par écrire un 1. On regarde les deux chiffres au dessus, et on les additionne :  $1 + 3 = 4$ . On écrit alors le chiffre 4. On continue. On regarde les deux chiffres au dessus, et on les additionne :  $3 + 3 = 6$ . On écrit le chiffre 6. On continue. On regarde les deux chiffres au dessus, et on les additionne :  $3 + 1 = 4$ . On écrit le chiffre 4. On finit notre ligne avec un 1. Et ainsi de suite... (**Exercice : essayer d'écrire la 6ème ligne sans regarder le triangle, puis vérifier si vous avez bon**). Si vous n'avez pas compris, vous pouvez consulter cette page :



<https://www.math93.com/index.php/histoire-des-maths/les-developpements/350-le-triangle-de-pascal>

dans la section "Méthode de construction du triangle de Pascal".

## 2) **A quoi ça sert ?**

Comme je l'ai écrit plus haut, il permet de développer sans aucun calcul les expressions du type  $(a + b)^n$ , pour tout  $n$  entier. Comment fait-on ?

On veut développer par exemple  $(a + b)^2$ . On écrit d'abord ceci :

$$\dots a^2 + \dots a * b + \dots b^2$$

C'est-à-dire que l'on fait la SOMME (addition) de PRODUIT (multiplication) de  $a^x$  avec  $b^y$ , où l'on fait varier les puissances  $x$  et  $y$ . On commence par écrire la puissance la plus grande possible pour  $a$  (dans mon exemple ici c'est  $x = 2$ ), et la puissance la plus petite possible, c'est-à-dire 0 pour  $b$ . Le deuxième terme aura une puissance de moins en  $a$  (donc 1), et une de plus en  $b$  (donc 1). Celle d'après aura une puissance de moins en  $a$  donc 0 et une de plus en  $b$  (donc 2).

Maintenant, pour les coefficients devant (c'est-à-dire à la place des ...) on met les coefficients du triangle de Pascal !

C'est-à-dire :

$$(a + b)^2 = \mathbf{1} * a^2 + \mathbf{2} * a * b + \mathbf{1} * b^2$$

Faisons maintenant le cas  $n = 3$ . On écrit :

$$(a + b)^3 = \mathbf{1} * a^3 + \mathbf{3} * a^2 * b^1 + \mathbf{3} * a^1 * b^2 + \mathbf{1} * b^3$$

**Exercice : Faites le cas  $n = 4$  puis le cas  $n = 5$**

RAPPEL : Si vous ne comprenez pas bien le triangle de Pascal, pas de panique : vous pouvez toujours retrouver ces identités en développant à chaque fois par exemple :

$$(a + b)^3 = (a + b)^2 * (a + b)$$

donc ce n'est pas grave. C'est juste que vos calculs seront un peu plus longs.

## 7 Règles de calcul

### 7.1 Sur les puissances

On a les relations suivantes, pour  $x, y$  des réels (ou des complexes) et  $m, n$  des entiers.

- $x^n x^m = x^{n+m}$
- $(x^n)^m = x^{nm} = (x^m)^n$
- $(xy)^n = x^n y^n$
- $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$  , pour  $x \neq 0$

On a les même relations avec les racines  $n$ -èmes, puisque  $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ , ainsi qu'avec la fonction exponentielle.

## 7.2 Sur le module/valeur absolue

Rappelons que lorsque  $x$  est un réel,  $|x|$  désigne sa valeur absolue, mais également son module (c'est la même chose quand on parle de réels). En revanche, lorsqu'on parle de complexes, non réels, par exemple  $1 + i$ , il ne faut pas parler de sa valeur absolue (elle n'existe pas), mais bien de son module !

À partir de la définition du module  $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$ , on obtient les relations suivantes, pour  $z, z'$  deux complexes et  $n \in \mathbb{N}$

- $|zz'| = |z| \times |z'|$
- $|z^n| = |z|^n$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
- $|z| = |\bar{z}|$
- $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$ , si  $z' \neq 0$
- $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$  si  $z \neq 0$ .

## 7.3 Sur l'argument

Pour  $z, z' \in \mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{N}$ ,

- $\arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z')$
- $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ , si  $z' \neq 0$
- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$
- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$

# 8 Les limites

## 8.1 Les formes indéterminées

Les formes indéterminées sont celles de la forme :

1.  $0 \times \pm\infty$  "plus ou moins l'infini"
2.  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
3.  $\frac{0}{0}$
4.  $+\infty - \infty$
5.  $1^\infty$

## 8.2 Les limites classiques à connaître

Certaines limites ne sont "que" des nombres dérivés "déguisés".

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

D'autres se rencontrent parfois sous le terme de "croissances comparées"

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0^-$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x} = 0$

## 8.3 Quelques techniques pour calculer des limites

La première chose à faire est de regarder si l'on fait face à une forme indéterminée ou pas. Si c'est le cas, il faut tout de même essayer de "deviner" la limite.

### 1. Mise en facteur des termes dominants

Exemple : On veut déterminer la limite de  $1 + x - e^x$ , quand  $x \rightarrow +\infty$ . C'est une forme indéterminée  $+\infty - \infty$ , mais on se doute que l'exponentielle va l'emporter sur le terme  $x$ . Pour le justifier, on écrit donc

$$1 + x - e^x = \underbrace{e^x}_{x \rightarrow +\infty \rightarrow +\infty} \left( \underbrace{\frac{1}{e^x} + \frac{x}{e^x} - 1}_{x \rightarrow +\infty \rightarrow -1} \right),$$

donc la limite est  $-\infty$ .

Exemple : On veut déterminer la limite, quand  $x \rightarrow +\infty$  de  $\frac{x-1}{1+e^x+e^{-x}}$ . C'est une forme indéterminée  $\infty/\infty$ , et on écrit

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{1+e^x+e^{-x}} &= \frac{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)}{e^x \left(\frac{1}{e^x} + 1 + e^{-2x}\right)} \\ &= \frac{x}{e^x} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + e^{-x} + e^{-2x}}. \end{aligned}$$

Le premier terme est connu (grâce aux croissances comparées) et le second tend vers  $1/1=1$ . On conclut donc que la limite est 0 ("l'exponentielle l'emporte").

Exemple : On veut déterminer la limite de  $\sqrt{4x^2 + x} - x$  en  $+\infty$ . C'est une forme indéterminée  $\infty - \infty$ , mais le terme dominant dans  $\sqrt{4x^2 + x}$  est  $\sqrt{4x^2} = 2x$  : on a

$$\begin{aligned} \sqrt{4x^2 + x} - x &= \sqrt{4x^2 \left(1 + \frac{1}{4x}\right)} - x \\ &= 2x \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} - x \\ &= x \left( \underbrace{2 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} - 1}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2-1=1} \right) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty. \end{aligned}$$

2. **Quantité conjuguée** Lorsque l'on a une, ou plusieurs racines, qui nous gêne et que la méthode précédente n'est pas concluante.

Exemple : on veut calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x} - x$ , on va donc multiplier par sa quantité conjuguée, qui est  $\sqrt{x^2 - x} + x$  :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - x} - x &= \left(\sqrt{x^2 - x} - x\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2 - x} + x}{\sqrt{x^2 - x} + x} \\ &= \frac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2 - x} + x} \\ &= \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x}. \end{aligned}$$

On factorise alors par les termes dominants :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - x} - x &= \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x} \\ &= \frac{-x}{x \sqrt{1 - \frac{1}{x}} + x} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Notons que, avec l'expression de départ, il est presque impossible de deviner la limite. Une fois que l'on a multiplié par la quantité conjuguée, cela peut être visible.

3. **Utilisations de taux d'accroissement** L'idée est de reconnaître un nombre dérivé, en un point (pas en  $\pm\infty$ !). À noter que cela s'applique surtout avec l'indétermination  $0/0$ .

Exemple : C'est de cette façon qu'on détermine la limite, en 0 de  $\sin x/x$ , ou de

$\ln(1+x)/x$

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{x} &= \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0} \sin'(0) = \cos 0 = 1. \\ \frac{\ln(1+x)}{x} &= \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x - 0}.\end{aligned}$$

Ainsi, en notant  $f : x \mapsto \ln(1+x)$ , on a

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1.$$

## 9 Polynômes irréductibles

La première chose à savoir est que tout polynôme s'écrit comme un produit de polynômes irréductibles. La deuxième chose à savoir, est "qu'est-ce-qu'un polynôme irréductible?". Et selon l'ensemble, cela est différent : il faut bien prendre soin de savoir/préciser dans quel ensemble on travaille, dans  $\mathbb{R}[X]$  ou dans  $\mathbb{C}[X]$  ?

### 9.1 Dans $\mathbb{C}[X]$

C'est le cadre le plus simple, car le plus "systématique".

Dans  $\mathbb{C}[X]$ , les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1, et rien d'autre.

Donc si l'on prend  $P(X) \in \mathbb{C}[X]$  et que l'on veut le décomposer en facteurs irréductibles, il faut chercher toutes ses racines, et factoriser.

**9.1.1. Exemple.** Prenons  $P(X) = X^3 + X^2 + X + 1$ ,  $-1$  est racine "évidente", on peut donc factoriser  $P$  par  $X - (-1) = X + 1$  :

$$X^3 + X^2 + X + 1 = (X + 1)(X^2 + 1).$$

Puisque  $X^2 + 1$  n'est pas de degré 1, il n'est pas irréductible dans  $\mathbb{C}[X]$  : il faut donc trouver ses racines, qui sont  $\pm i$ . On peut donc écrire  $X^2 + 1 = (X - i)(X - (-i)) = (X - i)(X + i)$ .

Donc

$$P(X) = X^3 + X^2 + X + 1 = (X + 1)(X + i)(X - i).$$

Lorsque l'on décompose un polynôme, en facteurs irréductibles, dans  $\mathbb{C}[X]$ , **il ne doit pas y avoir de facteurs de degré plus grands que 1!** Attention, cependant à ne pas confondre "un polynôme de degré 1, au carré" et "un polynôme de degré 2".

**9.1.2. Exemple.** Prenons  $P(X) = X^3 + 2X^2 + X$ , et décomposons-le en produit de facteurs irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$ . On remarque que l'on peut factoriser par  $X$  (ou que 0 est racine évidente), donc on peut écrire

$$P(X) = X(X^2 + 2X + 1),$$

puis, on sait que  $X^2 + 2X + 1 = (X + 1)^2$ , donc

$$P(X) = X(X + 1)^2.$$

Cette dernière écriture est la décomposition en produit de facteurs irréductibles de  $P(X)$ , dans  $\mathbb{C}[X]$ . En effet, les facteurs sont

- $X$
- $X + 1$
- $X + 1$

et chacun de ses termes sont irréductibles, car de degré 1.

Insistons sur le fait que  $X(X^2 + 2X + 1)$  **n'est pas** la décomposition en facteurs irréductibles de  $P(X)$ , puisque  $X^2 + 2X + 1$  n'est pas un polynôme irréductible!

## 9.2 Dans $\mathbb{R}[X]$

Dans  $\mathbb{R}[X]$ , les polynômes irréductibles sont

- les polynômes de degré 1
- les polynômes de degré 2 **n'ayant pas de racines réelles**

**9.2.1. Exemple.** Reprenons le premier exemple :  $P(X) = X^3 + X^2 + X + 1$ . Avant tout, on voit que  $\deg(P) = 3$ , donc  $P(X)$  n'est pas irréductible. De plus, on sait qu'un polynôme de degré 3 admet au moins une racine réelle. Ici, on voit que  $-1$  est racine de  $P$  : on factorise donc par  $X - (-1) = X + 1$ .

$$P(X) = (X + 1)(X^2 + 1).$$

$X + 1$  est irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$ , comme polynôme de degré 1, et  $X^2 + 1$  est de degré 2, sans racines réelles, donc il est irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$ .

La décomposition en facteurs irréductibles de ce polynôme  $P(X)$  est donc différente, selon que l'on soit sur  $\mathbb{C}[X]$  et sur  $\mathbb{R}[X]$ .

**9.2.2. Exemple.** Un second exemple, plus compliqué :  $P(X) = X^4 + 1$ . Cherchons sa décomposition dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Ici, la difficulté vient du fait que  $X^4 + 1$  n'a aucune racine réelle (à vous de savoir pourquoi). Pourtant, c'est un polynôme de degré 4 : il n'est donc pas irréductible ... Pour trouver sa décomposition en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ , on va d'abord chercher sa décomposition en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$ .

Posons d'abord  $Y = X^2$ , ainsi on a  $X^4 + 1 = Y^2 + 1$ , de racines  $\pm i$ . On peut donc écrire

$$Y^2 + 1 = (Y + i)(Y - i) = (X^2 + i)(X^2 - i).$$

Il nous reste à déterminer les racines carrées de  $\pm i$  : on trouve qu'il s'agit de  $e^{\frac{i\pi}{4}}$ ,  $e^{\frac{5i\pi}{4}}$ ,  $e^{-i\frac{i\pi}{4}}$  et  $e^{\frac{3i\pi}{4}}$ .

On peut donc écrire

$$P(X) = X^4 + 1 = \left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right) \left(X - e^{\frac{5i\pi}{4}}\right) \left(X - e^{-i\frac{i\pi}{4}}\right) \left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right).$$

Ici, on a déterminé la décomposition en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$ , cependant, la question est d'obtenir la décomposition sur  $\mathbb{R}[X]$  : il ne faut donc pas s'arrêter là!

Il faut utiliser une dernière propriété, pour terminer. Lorsque l'on prend  $z \in \mathbb{C}$ , alors le polynôme  $(X - z)(X - \bar{z})$  est un polynôme à coefficients **réels**! (Vérifiez-le : développez le produit, et exprimer  $z + \bar{z}$ , ainsi que  $z\bar{z}$ )

Il faut donc repérer les expressions conjuguées :

$$\begin{aligned} e^{-\frac{i\pi}{4}} &= \overline{e^{\frac{i\pi}{4}}} \\ e^{\frac{5i\pi}{4}} &= \overline{e^{\frac{3i\pi}{4}}}. \end{aligned}$$

La première ligne est évidente, à vous de justifier rapidement la seconde ligne.

On a donc

$$\begin{aligned} P(X) &= \left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right) \left(X - e^{\frac{5i\pi}{4}}\right) \left(X - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right) \left(X - e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right) \\ &= \underbrace{\left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right) \left(X - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)}_{X^2 - \sqrt{2}X + 1} \underbrace{\left(X - e^{\frac{5i\pi}{4}}\right) \left(X - e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right)}_{X^2 + \sqrt{2}X + 1} \\ &= \left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right) \left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right). \end{aligned}$$

Or, les polynômes  $X^2 - \sqrt{2}X + 1$  et  $X^2 + \sqrt{2}X + 1$  sont des polynômes de  $\mathbb{R}[X]$ , de degré 2, sans racines **réelles**, ils sont donc irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ .

•NB : Pensez que  $X - i$  n'est pas irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$ . Bien que ce soit un polynôme de degré 1,  $X - i$  n'appartient pas à  $\mathbb{R}[X]$ , puisqu'un de ses coefficients (le coefficient constant ici) n'est pas dans  $\mathbb{R}$ . Cela n'aurait donc aucun sens de dire qu'il est irréductible, ou même qu'il est réductible, dans  $\mathbb{R}[X]$ .

### 9.2.3. Exemple.

Autre méthode plus astucieuse : on essaie de reconnaître une identité remarquable :

$$P(X) = X^4 + 1 = (X^2 + 1)^2 - 2X^2 = (X^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}X)^2 = (X^2 + 1 - \sqrt{2}X)(X^2 + 1 + \sqrt{2}X)$$

Avec cet exemple en tête, trouvez la décomposition en facteurs irréductibles de

$$X^4 + X^2 + 1$$

sur  $\mathbb{R}$ .

## 10 Décomposition en éléments simples

L'objectif est de d'écrire une fraction, comme une somme de fractions plus simples (*éléments simple*). C'est une astuce de calcul très utile, notamment lorsque l'on calcule des intégrales : c'est donc une méthode à maîtriser!

### 10.1 Principe

On parle de décomposition en éléments simples (abrégée en DES dans la suite) lorsque l'on a une fraction du type  $A(X)/B(X)$ , où  $A(X)$  et  $B(X)$  sont deux polynômes.

1. La première étape consiste à regarder les degrés des polynômes. Si le degré de  $A(X)$  est supérieur, ou égal à celui de  $B(X)$ , alors on effectue la division euclidienne de  $A(X)$  par  $B(X)$  :

- Si  $\deg(A) \geq \deg(B)$ , en notant  $A(X) = B(X)Q(X) + R(X)$  la division euclidienne de  $A(X)$  par  $B(X)$ , on a  $\deg(R) < \deg(B)$ . La DES de  $A/B$  est alors  $Q$  + la DES de  $R/B$ .
  - Si  $\deg(A) < \deg(B)$ , comme c'est souvent le cas, il n'y a rien à faire.
2. On factorise ensuite  $B$  en facteurs irréductibles, comme on l'a vu à la section précédente. Précisons qu'en général, les DES se font dans  $\mathbb{R}[X]$ , donc il faut, en général, déterminer la décomposition en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$  de  $B$ . On aura donc des polynômes de degré 1, et, si l'on est sur  $\mathbb{R}[X]$ , des polynômes de degré 2, sans racines réelles. Précisons que chacun de ses termes peut-être à une puissance entière quelconque : 1, 5 ou 124!
  3. Si l'un des facteurs irréductibles de  $B(X)$  est  $(X - \alpha)^n$ , alors, dans la DES, il y aura

$$\frac{a_1}{X - \alpha} + \frac{a_2}{(X - \alpha)^2} + \dots + \frac{a_n}{(X - \alpha)^n},$$

où  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sont des réels à déterminer.

4. Si l'un des facteurs irréductibles de  $B(X)$  est  $(X^2 + \beta X + \gamma)^m$ , le principe est similaire au point précédent : dans la DES, il y aura

$$\frac{b_1 X + c_1}{X^2 + \beta X + \gamma} + \frac{b_2 X + c_2}{(X^2 + \beta X + \gamma)^2} + \dots + \frac{b_m X + c_m}{(X^2 + \beta X + \gamma)^m},$$

où  $b_1, c_1, b_2, c_2, \dots, b_m, c_m$  sont des constantes à déterminer.

5. Une fois toutes les constantes, pour tous les facteurs irréductibles déterminées, on a trouvé la DES.

Précisons que la différence, entre les facteurs irréductibles de degré 1, et de degré 2, se limite à ce qu'on trouve, dans la DES, au numérateur : des constantes dans un cas, des polynômes de degré 1 dans l'autre.

Si l'on cherche la DES dans  $\mathbb{C}[X]$ , puisque les seuls polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1, il n'y a pas à se poser de questions, concernant les degrés 2.

## 10.2 Comment trouver ces constantes ?

Plusieurs méthodes s'offrent à nous :

1. 1ère méthode : tout remettre au même dénominateur puis identifier les coefficients.

Ex : On cherche la DES de  $\frac{3X - 4}{X^2 - 5X + 6}$ . On écrit déjà que

$X^2 - 5X + 6 = (X - 2)(X - 3)$ . La DES sera donc de la forme

$$\begin{aligned} \frac{3X - 4}{X^2 - 5X + 6} &= \frac{3X - 4}{(X - 2)(X - 3)} \\ &= \frac{a}{X - 2} + \frac{b}{X - 3}. \end{aligned}$$

On met au même dénominateur, on obtient :

$$\frac{3X - 4}{X^2 - 5X + 6} = \frac{a(X - 3) + b(X - 2)}{(X - 2)(X - 3)} = \frac{X(a + b) - 3a - 2b}{X^2 - 5X + 6}$$



On identifie alors les coefficients pour obtenir

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ -3a - 2b = -4 \end{cases}$$

Que l'on résout en  $a = -2$  et  $b = 5$ .

Ainsi, la DES est donnée par :

$$\frac{3X - 4}{X^2 - 5X + 6} = \frac{-2}{X - 2} + \frac{5}{X - 3}$$

La limite de ce méthode est votre patience, et votre amour des calculs : plus l'on a de fractions, plus cela va être long et fastidieux de mettre sur un même dénominateur et d'identifier les coefficients ...

2. 2ème méthode : en multipliant par "ce qu'il faut" puis en évaluant en un point bien choisi.

Prenons le même exemple : on cherche  $a$  et  $b$  tels que

$$\frac{3X - 4}{X^2 - 5X + 6} = \frac{a}{X - 2} + \frac{b}{X - 3}$$

On va multiplier cette égalité par  $(X - 2)$ . On obtient :

$$\begin{aligned} \frac{(3X - 4)(X - 2)}{X^2 - 5X + 6} &= \frac{a(X - 2)}{X - 2} + \frac{b(X - 2)}{X - 3} \\ \frac{(3X - 4)(X - 2)}{(X - 2)(X - 3)} &= a + \frac{b(X - 2)}{X - 3} \\ \frac{3X - 4}{X - 3} &= a + \frac{b(X - 2)}{X - 3}. \end{aligned}$$

On voit que si l'on annule  $X - 2$ , le terme  $b$  va disparaître : on évalue donc cette égalité en  $X = 2$  :

$$\begin{aligned} \frac{3 \times 2 - 4}{2 - 3} &= a + \frac{b \times (2 - 2)}{2 - 3} \\ \frac{2}{-1} &= a + b \times 0 \\ a &= -2. \end{aligned}$$

On retrouve bien le même résultat pour  $a$  (ouf!).

Pour trouver  $b$ , on fait exactement la même méthode mais en multipliant par  $(X - 3)$  cette fois, puis en évaluant en 3. Faites-le pour vous entraîner !

La limite de cette méthode, est lorsque l'on a un facteur à une autre puissance que 1, au dénominateur. Par exemple, si l'on prend

$$\frac{1}{(X + 2)(X - 2)^2} = \frac{a}{X + 2} + \frac{b}{X - 2} + \frac{c}{(X - 2)^2},$$

on peut trouver la valeur de  $a$  en multipliant par  $X + 2$ , puis en évaluant en  $-2$ , et

on pourra trouver la valeur de  $c$  en multipliant par  $(X - 2)^2$ , puis en évaluant en 2. Cependant, la valeur de  $b$  est inaccessible, par cette méthode.

3. 3ème méthode : en multipliant par "ce qu'il faut" et en regardant la limite. Pour savoir "ce qu'il faut", il faut essayer. Lorsque l'on prend la limite, quand  $X \rightarrow +\infty$  dans la DES, on trouve  $0=0$ . Ce n'est pas très utile, on essaye alors de multiplier par  $X$ , puis de regarder la limite en  $+\infty$ .

Prenons l'exemple de

$$\frac{1}{(X^2 + X + 1)(X + 2)} = \frac{aX + b}{X^2 + X + 1} + \frac{c}{X + 2}.$$

Si on regarde la limite, en  $+\infty$  de cette expression, on obtient

$$0 = 0 + 0,$$

ce qui n'est d'aucune utilité. Multiplions donc par  $X$ , et regardons ensuite la limite :

$$\begin{aligned} \frac{X}{(X^2 + X + 1)(X + 2)} &= \frac{aX^2 + bX}{X^2 + X + 1} + \frac{cX}{X + 2}, \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{(X^2 + X + 1)(X + 2)} &= \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X^2}{X^2} \left( \frac{a + \frac{b}{X}}{1 + \frac{1}{X} + \frac{1}{X^2}} \right) + \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{X} \frac{c}{1 + \frac{2}{X}} \\ 0 &= a + c. \end{aligned}$$

On a donc obtenu une équation  $a + c = 0$ .

4ème méthode : Évaluer en un point, "bien choisi". Cette méthode est un peu la méthode à utiliser à la fin. Lorsqu'il vous manque des équations, essayez d'évaluer en des points simples  $X = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Attention à ne pas évaluer en des valeurs qui annulerait des dénominateurs : cela revient à diviser par 0 !

5ème méthode : Cette méthode ressemble à la deuxième. Lorsque vous avez un polynôme du second degré, irréductible, au dénominateur, vous pouvez tout multiplier par celui-ci, puis évaluer en une **racine complexe** ! Vous savez qu'il admet au moins une racine complexe, si vous la connaissez, vous pouvez le faire. Attention cependant, si vous faites une DES dans  $\mathbb{R}$  (comme c'est tout le temps le cas), les coefficients  $a, b, c, \dots$  sont **réels** ! Donc dans cette méthode, les  $i$  doivent se simplifier, lors de vos calculs !

## 11 Rédaction

Cette partie se concentre uniquement sur la rédaction, en mathématiques. Avant toute chose, gardez en tête que quelqu'un qui n'a pas lu le sujet, doit cependant comprendre, en lisant votre copie, de quoi vous parlez, et ce que vous faites.

- Faites des phrases! Il ne s'agit pas de tout écrire en toutes lettres, mais faire des mathématiques ne veut pas dire qu'il ne faut écrire aucun mot! "Pour que la fonction soit définie, il faut que ...", "Prenons  $z$  un nombre complexe et notons le  $a + ib$ , avec  $a$  et  $b$  deux réels ...", "La limite est ..."
- Lorsque l'énoncé nomme une fonction, c'est à dire lorsqu'il est indiqué "Soit  $f$  la fonction  $x \mapsto \dots$ ", ou " $f(x) = \dots$ ", vous pouvez librement parler de la fonction  $f$  dans votre copie, on sait qui c'est. En revanche, vous ne pouvez pas parler d'une fonction  $f$ , qui n'est pas définie dans l'énoncé, si vous ne la définissez pas non plus! Si vous voulez appeler une fonction  $f$ ,  $g$  ou n'importe comment, il faut l'écrire! Les correcteurs/trices ne peuvent pas deviner quelle est la fonction que vous appelez  $f$ , si vous ne l'écrivez pas avant! Pensez donc à commencer par "Notons  $f$  la fonction ...", ou "Notons  $z$  le nombre complexe solution de ...".
- Point similaire au précédent : pensez à "présenter" vos variables. Vous écrivez  $f(x)$ ? Qui est  $f$ ? Qui est  $x$ ? Si  $f$  est donnée dans l'énoncé (point précédent), pas besoin de le redire, en revanche on doit savoir qui est  $x$ , c'est à dire " $x$  est un réel positif", ou " $x \geq 48$ ", " $x \in \mathbb{R}$ "... Même chose lorsque vous écrivez un nombre complexe. Si vous l'écrivez " $a + ib$ ", il faut dire "avec  $a, b$  deux réels"! Si vous l'écrivez " $re^{i\theta}$ " il faut dire "avec  $r \geq 0$  et  $\theta \in \dots$ ". Outre le fait que ça rende la copie bien plus lisible et propre, cela vous permet d'avoir les idées claires sur la nature des variables/objets/notations. Et donc pouvoir écrire  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , par exemple. (Si vous n'avez pas écrit que  $a, b$  sont deux réels, et si ce sont des complexes, vous n'avez pas le droit d'utiliser le symbole  $\sqrt{\cdot}$ !)
- Pensez à écrire les arguments! Si vous divisez par un nombre  $a$  il faut :
  1. avoir dit qui était  $a$  au préalable (deuxième point)
  2. dire pourquoi vous pouvez le faire : pourquoi avez-vous le droit de diviser par  $a$ ? Est-ce-que  $a$  est non nul? Si non, vous ne pouvez pas le faire, et vous écrivez n'importe quoi! Si oui, vous pouvez le faire, mais il faut l'indiquer sur votre copie, ainsi que la raison " $a \neq 0$  car ...". Même chose si vous voulez composer par un logarithme, une racine, ou élever au carré dans une résolution d'inéquation : le sens de l'inéquation est-il conservé? Si oui, pourquoi?
- Attention au symbole  $\iff$  ! On écrit jamais "valeur  $\iff$  valeur" :  $6 \iff 8$  n'a pas plus de sens que  $6 \iff 6$ . Aucun n'est vrai, aucun n'est faux : ça n'a pas de sens. N'utilisez le symbole équivalent que lorsque vous résolvez des équations, des inéquations, des systèmes ... Si, en plus de ça, vous êtes capable de vous demander, à chaque étape, est-ce-qu'il y a bien l'équivalence, c'est encore mieux!
- Lorsque vous rencontrez des formes indéterminées, lors de calculs de limites, vous pouvez dire "C'est une forme indéterminée de la forme  $0/0$ ". Mais n'écrivez pas seulement " $0/0$ ", ni "forme indéterminée : $0/0$ ".  $0/0$  est un truc qui n'a pas de sens, alors soit vous écrivez "de la forme  $0/0$ ", soit vous mettez des guillemets autour de  $0/0$ , que l'on voit que vous avez conscience que  $0/0$  est un bidule qui n'existe pas.

- Vous devez rédiger vos calculs de limite! Écrire

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{1+x^2} = 0,$$

n'est pas une justification, seulement une valeur! Pour le rédiger, c'est

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{1+x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{x^2}{x^2}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + 1}}_{\rightarrow 0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

De même, lorsque vous regardez  $\lim_{+\infty} (5 + \cos(x))/x$ , il faut dire que  $\cos$  est bornée (entre -1 et 1)! Par exemple, en écrivant l'encadrement de  $1 + \cos(x)$ , puis en multipliant par  $x$  (pourquoi le sens est conservé d'ailleurs? Car on regarde la limite quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , donc on prend  $x \geq 0$ ! Il faut le dire!).

## 12 Calcul d'intégrales

### 12.1 Primitives usuelles (à connaître!)

Voici un tableau récapitulatif des primitives classiques **à connaître**. Une primitive n'est jamais unique, car si  $F$  est une primitive de  $f$ , alors pour toute constante  $c$ ,  $F + c$  est également une primitive de  $f$ . Dans le tableau ci-dessus nous donnons **une** primitive à chaque fois, si vous voulez connaître **toutes** les primitives des fonctions suivantes, il faudrait rajouter une constante.

Fonction	Primitive
$x^n$ avec $n \in \mathbb{Q}$ , $n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln( x )$
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$

Dans la suite,  $u(x)$  désigne une fonction (dérivable) de  $x$ . Grâce au tableau ci-dessus et en utilisant la **formule de changement de variables**, on trouve directement :

Fonction	Primitive
$u(x)^n \times u'(x)$ avec $n \in \mathbb{Q}, n \neq -1$	$\frac{u(x)^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{u(x)} \times u'(x)$	$\ln( u(x) )$
$\exp(u(x)) \times u'(x)$	$\exp(u(x))$
$\frac{1}{1+u(x)^2} \times u'(x)$	$\arctan(u(x))$
$\sin(u(x)) \times u'(x)$	$-\cos(u(x))$
$\cos(u(x)) \times u'(x)$	$\sin(u(x))$
$(1 + \tan^2(u(x))) \times u'(x) = \frac{1}{\cos^2(u(x))} \times u'(x)$	$\tan(u(x))$

## 12.2 Intégration par parties

Des fois, nous ne pouvons pas utiliser les tableaux ci-dessus pour trouver une primitive de notre fonction car celle-ci est plus compliquée que celles citées précédemment. Voici alors une nouvelle technique d'intégration : **l'intégration par parties**.

Elle vient de la formule que l'on connaît bien de la dérivée d'un produit :

soient  $u$  et  $v$  des fonctions dérivables sur un certain intervalle  $I$ . Alors, la fonction (produit)  $uv$  est également dérivable, et on a :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

En "primitivant" cette égalité, on trouve

$$uv = \int u'v + \int uv'$$

et donc

$$\boxed{\int uv' = uv - \int u'v}$$

L'idée est alors de se ramener à une nouvelle intégrale, celle de  $u'v$ , en espérant cette fois-ci que l'on puisse la calculer.

### 12.2.1. Exemple.

1. Si on veut calculer une primitive de la fonction  $f(x) = x \cos(x)$ . Elle ne fait pas partie de notre "catalogue" des fonction connues citées dans la première partie. La fonction  $f$  est un produit de deux fonctions, essayons donc de faire une intégration par parties. Nous devons alors décider de qui va jouer le rôle de la fonction " $u$ " que l'on va **dérivée**, et qui va jouer le rôle de la fonction " $v$ " que l'on va **intégrer**. On voit que si on dérive la fonction  $x \mapsto x$ , on va retrouver la fonction constante  $x \mapsto 1$ . Cela nous facilitera sûrement les calculs! Essayons.

$$\begin{aligned} \text{On pose } & u(x) = x \text{ et } v'(x) = \cos(x) \\ \text{ainsi, } & u'(x) = 1 \text{ et } v(x) = \sin(x) \end{aligned}$$

En appliquant notre formule encadrée, on trouve :

$$\int f(t)dt = x \sin(x) - \int 1 \cdot \sin(x)$$

Mais maintenant, on connaît une primitive de  $\sin(x)$  : elle est donnée par  $-\cos(x)$ . Ainsi, une primitive de  $f$  est donnée par :

$$\int f(t)dt = x \sin(x) + \cos(x)$$

2. Si on veut calculer une primitive de la fonction  $f(x) = \arctan(x)$ . De même, elle ne fait pas partie de notre catalogue. Comment s'en sortir ici ? Toujours en faisant une Intégration par partie : en effet  $f(x) = 1 \times \arctan(x)$ . Ainsi, on va dériver la fonction Arctangente (ici le choix entre  $u$  et  $v'$  ne se pose pas puisque justement on ne sait pas primitiver  $\arctan$ ). Ainsi,

On pose  $u(x) = \arctan(x)$  et  $v'(x) = 1$   
 ainsi,  $u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$  et  $v(x) = x$

En appliquant notre formule encadrée, on trouve :

$$\int f(t)dt = x \arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}$$

Il nous faut alors calculer  $\int \frac{x}{1+x^2}$ , on trouve :

$$\int \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \times \int \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{w'(x)}{w(x)}$$

où on a posé  $w(x) = 1+x^2$ . Ainsi, en utilisant notre tableau de départ, on trouve :

$$\int \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln(|1+x^2|)$$

et donc

$$\int f(t)dt = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

(ici on peut enlever les valeurs absolues car pour tout réel  $x$ ,  $1+x^2$  est positif).

## 12.3 Changement de variable

**12.3.1. Exemple.** Déterminons une primitive de  $x \mapsto 2x \cos(x^2)$ . On va procéder au changement de variable  $u = x^2$ . On a donc

$$”\frac{du}{dx} = ”u'(x) = 2x,$$

dont on peut déduire

$$”du = 2xdx”.$$

Les écritures précédentes sont entre guillemets, car en toute rigueur, ce que l'on note  $dx$ , ou  $du$ , n'a pas vraiment de sens. Cependant, on privilégie ici la clarté de la méthode, et l'efficacité dans les calculs, à la précision et à la rigueur.

On écrit donc

$$\begin{aligned}\int x \cos(x^2) dx &= \int \cos(u) \frac{du}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int \cos(u) du \\ &= \frac{\sin(u)}{2} \\ &= \frac{\sin(x^2)}{2}.\end{aligned}$$

Attention à bien conclure "en  $x$ " ! Il ne faut pas s'arrêter à l'avant-dernière ligne.

Toute la difficulté du changement de variable, un peu comme pour l'ipp, réside au début : à poser "le bon" changement de variable. Ensuite, il suffit de bien tout remplacer, et de ne pas se tromper dans les calculs.