UNE INTRODUCTION ÉLÉMENTAIRE À L'ESPACE DES FRÉQUENCES DU GROUPE D'HEISENBERG

JEAN-YVES CHEMIN

(D'APRÈS H. BAHOURI, J.-Y. CHEMIN ET R. DANCHIN)

Keywords: Fourier transform, Heisenberg group, frequency space, Hermite fonctions.

AMS Subject Classification (2000): 43A30, 43A80.

Introduction

Ce texte consiste essentiellement en les notes d'un exposé de colloquium donné à Strasbourg en octobre 2017, à l'École Normale Supérieure de Paris, à Rennes en janvier 2018, à Nantes en novembre 2018, à Nancy en mars 2019 et au séminaire du laboratoire Jacques-Louis Lions en décembre 2019 sur la transformation de Fourier sur le groupe d'Heisenberg. Je tiens à remercier les organisatrices et organisateurs de ces évènements notamment Olivier Guichard de l'Université de Strasbourg, Isabelle Gallagher et Isabelle Tristani de l'École Normale Supérieure, Juliette Bavard de l'Université de Rennes, Bernard Hellfer et Frédéric Hérau de l'Université de Nantes, Bruno Duchesne et Youness Lamzouri de l'Université de Lorraine. Enfin, je remercie les organisateurs du séminaire du laboratoire Jacques-Louis Lions pour leur invitation à y parler. Au delà, mes remerciements vont aux auditoires de ces conférences, qui par leurs questions et remarques stimulantes ont non seulement contribué à améliorer cette présentation mais aussi à poser de nouvelles questions.

Les résultats et l'approche présentée ici sont le fruit d'une collaboration au long cours avec H. Bahouri et R. Danchin sur l'analyse de Fourier sur $\mathbb{R}^n$ et quelques unes de ses applications notamment au travers du livre [1]. Ayant dérivé de $\mathbb{R}^n$ au groupe d'Heisenberg, nous nous sommes posés plusieurs questions, notamment comment définir la transformation de Fourier sur la groupe d'Heisenberg pour des distributions tempérées? Cette question simple, et de manière surprenante non résolue il y a peu, nous a amené assez naturellement à une question encore plus simple, également non résolue : peut-on définir une "variable de Fourier" comme dans le cas des groupes commutatifs, c'est-à-dire trouver un espace sur lequel la transformation de Fourier puisse être définie comme une fonction continue "nulle à l'infini". À notre grande surprise, cette question s'est révélée assez ouverte. La réponse à cette question est l'objet de ce texte.

Le texte sera organisé de la manière suivante :

- dans une première section, nous présenterons très brièvement la transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^n$ et les principales propriétés que nous souhaiterions retrouver dans le cadre du groupe d'Heisenberg;
- dans une deuxième section, nous présenterons le groupe d'Heisenberg ainsi que la transformation de Fourier que l'on choisira de définir à l'aide de la famille de représentations dites de Schrödinger;
- dans une troisième section, nous définirons la transformation de Fourier en tant que fonction et utiliserons cette définition pour démontrer une formule d'inversion;

- dans la quatrième section, nous montrerons un résultat de continuité uniforme qui permettra de définir l'espace des fréquences comme le complété de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ pour une distance convenable;
- dans une cinquième section, nous expliquerons comment cette construction permet d'étendre la transformation de Fourier aux distributions tempérées.

En conclusion, le lecteur intéressé par l'analyse sur les groupes non commutatifs et notamment le groupe d'Heisenberg pourra consulter les livres [4], [5], [7], [8], [9] et [14]–[17].

1. Quelques brefs rappels sur la transforation de Fourier sur $\mathbb{R}^n$

Rappelons la définition de la transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1. *La transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^n$ est définie par*

$$\mathcal{F}\quad\left\{\begin{array}{ccc} L^1(\mathbb{R}^n) & \longmapsto & C_0((\mathbb{R}^n)^\star) \\ f & \longmapsto & \widehat{f}(\xi) \stackrel{\text{déf}}{=} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle\xi,x\rangle} f(x)dx \end{array}\right.$$

où $C_0((\mathbb{R}^n)^\star)$ désigne l'espace des fonctions continues nulles à l'infini sur $(\mathbb{R}^n)^\star$.

Quelques remarques: tout d'abord, nous voyons ici la variable de Fourier comme une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ et ici la notation $\langle\xi,x\rangle$ désigne la valeur de la forme linéaire ξ sur le vecteur x de $\mathbb{R}^n$. En coordonnées, ceci s'écrit de la manière habituelle

$$\langle\xi,x\rangle=\sum_{j=1}^d \xi_j x_j.$$

Le fait de voir la variable ξ comme une forme linéaire résulte simplement du fait que, si A est une transformation linéaire inversible de $\mathbb{R}^n$, on a, après un changement de variable $y=Ax$,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f\circ A)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle\xi,x\rangle} f(Ax)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle\xi,A^{-1}y\rangle} f(y)dy.\end{aligned}$$

Par définition de la tranposée d'une application linéaire,

$$\langle\xi,A^{-1}y\rangle=\langle{}^tA^{-1}\xi,y\rangle$$

et ainsi donc on a $\mathcal{F}(f\circ A)=\widehat{f}\circ{}^tA^{-1}$.

Nous allons maintenant donner quelques propriétés qui semblent constitutives de la transformation de Fourier. Une simple application du théorème de Fubini assure que

$$\mathcal{F}(f\star g)=\widehat{f}\,\widehat{g}. \tag{1.1}$$

La transformation de Fourier diagonalise le laplacien au sens où, si f est par exemple une fonction indéfiniment différentiable à support compact,[1] le fait que

$$-\Delta_x e^{-i\langle\xi,x\rangle}=|\xi|^2 e^{-i\langle\xi,x\rangle} \tag{1.2}$$

assure au prix d'intégrations par parties que l'on a

$$\mathcal{F}(-\Delta f)(\xi)=|\xi|^2\widehat{f}(\xi). \tag{1.3}$$

[1] ou plus généralement une fonction indéfiniment différentiable à décroissance rapide (i.e. plus rapide que n'importe quelle puissance de $|x|$), c'est-à-dire une fonction de classe de Schwartz

Ceci donne corps au principe général que la régularité d'une fonction se traduit en décroissance de sa transformaée de Fourier.

Un autre point crucial de la transformation de Fourier est le théorème d'inversion ainsi que la formule de Fourier-Plancherel qui affirme que la transformation de Fourier est, à une homothétie près, une isométrie. Énonçons ce théorème.

Théorème 1.1. *Soit f une fonction de $L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que sa transformation de Fourier soit aussi dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors on a*

$$f(x) = (2\pi)^{-d} \int_{(\mathbb{R}^n)^\star} e^{i\langle \xi, x\rangle} \widehat{f}(\xi) d\xi \quad \text{et} \quad \|\widehat{f}\|_{L^2((\mathbb{R}^n)^\star)} = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Enfin en utilisant la densité des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ et la relation (1.3), on démontre un théorème classique dit de Riemann-Lebesque qui décrit la régularité de la transformation de Fourier d'une fonction intégrable.

Théorème 1.2. *La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ envoie continûment les fonctions intégrables dans les fonctions continues nulles à l'infini avec une norme plus petite de* 1.

2. Une introduction au groupe d'Heisenberg

Par souci de simplicité, nous n'étudierons dans ce texte que le groupe d'Heisenberg dit d'ordre 1. Nous mentionnerons occasionnellement le cas général.

Définition 2.1. *On appelle groupe d'Heisenberg et l'on note $\mathbb{H}$ l'ensemble $\mathbb{R}^3$ (dont on note $w = (y, \eta, s)$ un point courant) muni de la loi suivante*

$$w \cdot w' \stackrel{\text{déf}}{=} \big(y + y', \eta + \eta', s + s' + 2(\eta y' - \eta' y)\big)$$

C'est un exercice très élémentaire d'algèbre que de vérifier que c'est bien un groupe et que

$$w^{-1} = -w.$$

Dans tout ce texte, nous nous plaçons dans ce cas particulier. Le groupe d'Heisenberg général est le suivant : c'est $\mathbb{H}^d = T^\star\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ dont on note $w = (y, \eta, s)$ un point courant et le produit est alors défini par

$$w \cdot w' = \big(y + y', \eta + \eta', s + s' + 2\sigma((y, \eta), (y', \eta))\big)$$

où σ désigne le 2 forme symplectique canonique sur $T^\star\mathbb{R}^d$, $\sigma((y, \eta), (y', \eta)) = \langle \eta, y'\rangle - \langle \eta', y\rangle$. Se placer dans le cas où $d = 1$ permet une écriture moins lourde et, pour ce qui nous intéresse ici, rien n'est fondalement différent du cas où d est quelconque.

Définissons maintenant les différents objets de base qui permettent de faire de l'analyse. Tout d'abord, les dilatations qui doivent vérifier

$$\delta_\alpha(w \cdot w') = \delta_\alpha(w) \cdot \delta_\alpha(w').$$

Ceci conduit à poser

$$\delta_\alpha(w) \stackrel{\text{déf}}{=} (\alpha y, \alpha\eta, \alpha^2 s). \tag{2.1}$$

Cela nous amène au concept de dimension homogène. Ici la dimension de $\mathbb{H}$ en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ est 3. Mais on peut regarder la dimension avec un autre point de vue qui consiste à considérer l'entier Q tel que le déterminant de δ_α est α^Q. On trouve ici $Q = 4$ et cet entier est appelé dimension homogène. C'est la dimension de l'analyse ; par exemple cette dimension dite homogène gouverne les inclusions de Sobolev, sujet que nous n'aborderons par ici (voir exemple [6]).

Un objet important de l'analyse est bien sûr la mesure invariante : ici il est très aisé de voir que les translations (à droite comme à gauche) ont un jacobien égal à 1 et donc elles préservent la mesure de Lebesgue. On peut donc définir la convolution par la formule

$$f \star g(w) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{H}} f(w \cdot v^{-1}) g(v)\, dv = \int_{\mathbb{H}} f(v) g(v^{-1} \cdot w)\, dv. \tag{2.2}$$

Il convient de noter que la convolution définie ici n'est pas commutative et que le choix fait ici comporte une part d'arbitraire [2].

Il est bien sûr crucial de définir l'équivalent des champs de vecteurs à coefficients constants sur $\mathbb{R}^n$ qui sont les dérivations invariantes par translation, c'est-à-dire qui permutent aux translations. Ici, comme l'usage le veut en théorie des groupes, on va considérer les champs de vecteurs invariants par les translations à gauche. C'est un exercice de calcul différentiel (omis) que de vérifier que l'espace vectoriel des champs invariants à gauche est engendré par les trois champs de vecteurs suivants

$$\mathcal{Y}_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \partial_y + 2\eta\partial_s\,,\ \mathcal{Y}_2 \stackrel{\text{déf}}{=} \partial_\eta - 2y\partial_s \quad \text{et} \quad S \stackrel{\text{déf}}{=} \partial_s\,. \tag{2.3}$$

Remarquons que

$$\mathcal{Y}_j(f \star g) = f \star (Y_j g) \quad \text{et} \quad S(f \star g) = f \star (Sg)$$

mais en général, l'égalité devient fausse si l'on fait porter les dérivations à gauche de la convolution.

Le champ de vecteurs S est différent des deux autres pour une raison d'homogénéité; en effet on a

$$(\mathcal{Y}_j f) \circ \delta_\alpha = \alpha(\mathcal{Y}_j f) \circ \delta_\alpha \quad \text{mais} \quad (Sf) \circ \delta_\alpha = \alpha^2 (Sf) \circ \delta_\alpha.$$

Cela est lié au fait que la dimension de la variable dite verticale s est 2. D'une certaine manière, S est un opérateur d'ordre 2. Remarquons en effet que

$$[\mathcal{Y}_2, \mathcal{Y}_1] \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{Y}_2\mathcal{Y}_1 - \mathcal{Y}_1\mathcal{Y}_2 = 4S.$$

On définit le laplacien comme la somme des carrés de champs des vecteurs "d'ordre 1" i.e.

$$\Delta_{\mathbb{H}} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{Y}_1^2 + \mathcal{Y}_2 = \partial_1^2 + \partial_2 + 4(\eta\partial_y - y\partial_\eta)\partial_s + (y^2+\eta^2)\partial_s^2. \tag{2.4}$$

Remarquons que l'on peut "récupérer" la dérivation en S à partir du laplacien grâce à l'inégalité suivante dite sous-ellipticité que nous admettons pour le moment:

$$\|Su\|_{L^2} \lesssim \|\Delta_{\mathbb{H}} u\|_{L^2}. \tag{2.5}$$

Venons-en à la transformation de Fourier. Dans le cas d'un groupe commutatif localement compact G muni d'une mesure invariante $d\mu_G$, on considère le groupe dual $\widehat{G}$ défini comme le groupe des caractères, c'est-à-dire homomorphismes de G dans le groupe $\mathbb{S}^1$ des nombres complexes de module 1. La transformation de Fourier d'une fonction intégrable sur G est alors définie sur $\widehat{G}$ par

$$\widehat{f}(\gamma) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_G \gamma(x) f(x) d\mu_G(x)\,. \tag{2.6}$$

Dans le cas de $\mathbb{R}^n$, le groupe dual $\widehat{G}$ s'identifie à $(\mathbb{R}^n)^\star$ par

$$\xi \longmapsto \big(x \mapsto e^{-i\langle \xi, x\rangle}\big)$$

Dans la cas du tore $G = (2\pi\,\mathbb{T})^n$, le groupe dual $\widehat{G}$ s'identifie à $\mathbb{Z}^n$ par

$$k = (k_1, \cdots k_n) \longmapsto \big(x \mapsto e^{-i\sum_{j=1}^n k_j x_j}\big).$$

[2] On pourrait définir la convolution en remplaçant $v^{-1} \cdot w$ par $w \cdot v^{-1}$ comme argument de g

Si l'on tente de suivre cette méthode dans le cadre du groupe non commutatif $\mathbb{H}$, on trouve que le groupe des caractères sur $\mathbb{H}$ est décrit par

$$(y,\eta)\longmapsto e^{-i(\dot{y}y+\dot{\eta}\eta)}\quad\text{pour}\quad(\dot{y},\dot{\eta})\in\mathbb{R}^2\,.$$

Si l'on suit le cadre des groupes commutatifs, on définit la transformation de Fourier d'une fonction intégrable sur $\mathbb{H}$ comme

$$(\dot{y},\dot{\eta})\longmapsto\int_{\mathbb{H}}e^{-i(\dot{y}y+\dot{\eta}\eta)}f(w)dw=\int_{\mathbb{R}^2}e^{-i(\dot{y}y+\dot{\eta}\eta}\Big(\int_{\mathbb{R}}f(y,\eta,s)ds\Big)dyd\eta\,.$$

On observe immédiatement que cette transformation ne dépend que de la moyenne verticale de la fonction f. Tout espoir d'une formule d'inversion est donc vain.

Ce que l'on déduit de cette observation est le groupe $\mathbb{S}^1$ des complexes de module 1 est trop "petit" pour décrire la complexité d'un groupe non commutatif tel que $\mathbb{H}$. Une des idées fondatrices de la théorie des groupes est d'utiliser la théorie des représentations, c'est-à-dire des homomorphismes du groupe, ici $\mathbb{H}$, dans un groupe de transformations unitaires d'un espace de Hilbert. Nous n'entrerons pas ici dans la théorie des représentations dite irréductibles mais considérerons simplement la représentation de Schrödinger.[3]

3. Les représentations de Schrödinger et la transformation de Fourier

Définissons la famille des représentations de Schrödinger.

Définition 3.1. *On appelle représentation de Schrödinger la famille d'applications suivantes, indexée par le paramètre λ qui varie dans $\mathbb{R}\setminus\{0\}$,*

$$\begin{cases}\mathbb{H} & \longrightarrow & \mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}))\\ w & \longmapsto & \mathcal{U}^\lambda_w\,:\,\phi\mapsto e^{-is\lambda-2i\eta(x-y)}\phi(x-2y).\end{cases}$$

Un calcul élémentaire permet de vérifier que pour chaque λ, l'application qui a w associe $\mathcal{U}^\lambda_w$ est bien un morphisme de groupe, c'est-à-dire que

$$\forall(w,w')\in\mathbb{H}^2\,,\;\mathcal{U}^\lambda_{w\cdot w'}=\mathcal{U}^\lambda_w\circ\mathcal{U}^\lambda_{w'}\,.$$

On peut maintenant définir la transformation de Fourier de manière analogue à celle utilisée dans les définitions 1.1 et (2.6).

Définition 3.2. *La transformation de Fourier d'une fonction intégrable f sur $\mathbb{H}$ est la famille $(\mathcal{F}^{\mathbb{H}}(f)(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ d'opérateurs bornés sur $L^2(\mathbb{R})$ définie par*

$$\mathcal{F}^{\mathbb{H}}(f)(\lambda)\stackrel{\text{déf}}{=}\int_{\mathbb{H}^d}f(w)U^\lambda_w\,dw.$$

Définie ainsi, la transformation de Fourier d'une fonction intégrable sur $\mathbb{H}$ apparaît comme une famille à un paramètre réel d'opérateurs bornées sur $L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\,,\;\big\|\mathcal{F}^{\mathbb{H}}f(\lambda)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))}\leq\|f\|_{L^1(\mathbb{H})}\,.\tag{3.1}$$

On retrouve l'analogue de quelques propriétés clef de la transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^n$. Par exemple, l'analogue de la relation (1.1) sur la convolution s'écrit

$$\mathcal{F}^{\mathbb{H}}(f\star g)(\lambda)=\mathcal{F}^{\mathbb{H}}f(\lambda)\circ\mathcal{F}^{\mathbb{H}}(g)(\lambda).\tag{3.2}$$

Il est possible d'établir dans ce contexte des analogues de la formule d'inversion et de Fourier-Plancherel telles qu'énoncées dans le théorème 1.1. On a

$$f(0)=\pi^{-2}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{tr}\big(\mathcal{F}^{\mathbb{H}}(f)(\lambda)\big)|\lambda|d\lambda\quad\text{and}\quad\|f\|^2_{L^2(\mathbb{H})}=\pi^{-2}\int_{\mathbb{R}}\big\|\mathcal{F}^{\mathbb{H}}(f)(\lambda)\big\|^2_{HS}|\lambda|d\lambda\tag{3.3}$$

[3] On peut démontrer que les représentations irréductibles sont toutes "équivalentes"

où tr désigne la trace et $\|\cdot\|_{HS}$ la norme de Hilbert-Schmidt. Nous établirons ces deux formules dans un autre cadre.

L'une des motivations de départ est de définir la transformation de Fourier des distributions tempérées. Si l'on veut procéder dans le cadre de la dualité mis au point par L. Schwartz, il faut pouvoir caractériser l'image de la classe de Schwartz $\mathcal{S}$ par cette transformation de Fourier $\mathcal{F}^{\mathbb{H}}$. Ceci a été fait par D. Geller dans [11] mais cette caractérisation est difficile à manier pour étendre la transformation de Fourier par dualité. Ceci nous conduit à essayer de définir la transformation de Fourier comme une fonction ce qui nécessite d'identifier "la variable de Fourier" c'est-à-dire l'espace des fréquences.

Pour ce faire, étudions l'action du sous-laplacien $\Delta_{\mathbb{H}}$ sur la transformation de Fourier $\mathcal{F}^{\mathbb{H}}$. Si f est par exemple une fonction de la classe de Schwartz $\mathcal{S}$, quelques intégrations par parties assure alors que pour toute fonction ϕ indéfiniment dérivable à support compact sur $\mathbb{R}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \big(\mathcal{F}^{\mathbb{H}}(-\Delta_{\mathbb{H}}f)(\lambda)(\phi)\big)(x) = \int_{\mathbb{H}} (-\Delta_{\mathbb{H}})(\mathcal{U}^\lambda_w\phi)(x)f(w)dw\,.$$

Un calcul élémentaire assure alors que

$$\Delta_{\mathbb{H}}(\mathcal{U}^\lambda_w\phi)(x) = 4\big(\mathcal{U}^\lambda_w(\Delta^\lambda_{osc}\phi)\big)(x) \quad \text{avec} \quad \Delta^\lambda_{osc}\phi(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \phi''(x) - \lambda^2x^2\phi(x).$$

En fait, l'opérateur Δ^λ_{osc} est l'oscillateur harmonique rescalé. Comme l'idée est de "diagonaliser" le laplacien, il est naturel d'utiliser la structure spectrale de l'oscillateur harmonique (ici Δ^1_{osc}) qui est parfaitement connue. Rappelons que les fonctions d'Hermite [4] $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ de vecteurs propres de l'oscillateur harmonique Δ^1_{osc}. Elles sont définies par

$$H_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2n}}CH_n \quad \text{avec} \quad (Cf)(x) \stackrel{\text{déf}}{=} -f'(x) + xf(x) \quad \text{et} \quad H_0(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \pi^{-\frac14}e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{3.4}$$

L'opérateur C est connu sous le nom d'opérateur de création. Nous utiliserons également l'opérateur d'annihilation défini par

$$(A\phi) \stackrel{\text{déf}}{=} \phi' + M\phi \quad \text{avec} \quad (M\phi)(x) \stackrel{\text{déf}}{=} x\phi(x)\,. \tag{3.5}$$

Remarquons que nous avons

$$\begin{aligned} MH_n &= \frac12\big(\sqrt{2n}\,H_{n-1} + \sqrt{2n+2}\,H_{n+1}\big) \quad \text{and} \\ H'_n &= \frac12\big(\sqrt{2n}\,H_{n-1} - \sqrt{2n+2}\,H_{n+1}\big). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Nous avons donc par dilation

$$-\Delta^\lambda_{osc}H_{n,\lambda}(x) = |\lambda|(2n+1)H_{n,\lambda}(x) \quad \text{avec} \quad H_{n,\lambda}(x) =\stackrel{\text{déf}}{=} |\lambda|^{\frac14}H_n(|\lambda|^{\frac12}x).$$

Dorénavant, nous n'allons plus considérer l'opérateur $\mathcal{F}^{\mathbb{H}}f(\lambda)$ lui-même mais sa matrice (infinie) dans la base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ formée par la suite $(H_{n,\lambda})_{n\in\mathbb{N}}$ ce qui nous permettra de voir la transformation de Fourier comme une fonction de l'indice de ligne m, de l'indice de colonne n et du réel non nul λ.

[4] Pour plus de détails sur les fonctions d'Hermite, voir par exemple les notes N. Lerner ([13])

4. La transformation de Fourier vue comme une fonction

Définition 4.1. *Posons* $\widetilde{\mathbb{H}} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{N}^2 \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ *;* $\widehat{w} = (n, m, \lambda)$ *désigne un point courant de* $\widetilde{\mathbb{H}}$*. On désigne par* $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}$ *l'application définie par*

$$\mathcal{F}_{\mathbb{H}} \left\{ \begin{array}{ccl} L^1(\mathbb{H}) & \longrightarrow & L^\infty(\widetilde{\mathbb{H}}) \\ f & \longmapsto & \widehat{f}_{\mathbb{H}}(\widehat{w}) \stackrel{\text{déf}}{=} \displaystyle\int_{\mathbb{H}} e^{-is\lambda} \overline{\mathcal{W}(\widehat{w}, Y)}\, f(Y, s)\, dY\, ds \end{array} \right.$$

où $\mathcal{W}(\widehat{w}, Y)$ *est, à quelques renormalisations près, la transformée de Wigner des fonctions d'Hermite* H_n *et* H_m *; plus précisement*

$$\mathcal{W}(\widehat{w}, Y) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{2i\lambda\eta z} H_{n,\lambda}(y+z) H_{m,\lambda}(-y+z)\, dz. \tag{4.1}$$

Dans la définition, ci-dessus, la transformation de Fourier apparaît bien comme une fonction sur l'espace $\widetilde{\mathbb{H}}$. Remarquons que, modulo le changement de variable $z = x - y$, on a

$$e^{-is\lambda} \overline{\mathcal{W}(\widehat{w}, Y)} = \big(\mathcal{U}_w^\lambda H_{m,\lambda} | H_{n,\lambda}\big)_{L^2}$$

La quantité $e^{-is\lambda} \overline{\mathcal{W}(\widehat{w}, Y)}$ joue, dans le cadre de $\mathbb{H}$, exactement le même rôle que la quantité $e^{-i\langle \xi, x\rangle}$ dans le cadre de $\mathbb{R}^n$. On peut aussi dire que de la même manière que l'application

$$\xi \longmapsto \big(x \mapsto e^{-i\langle \xi, x\rangle}\big)$$

fournit un paramétrage des caractères de $\mathbb{R}^n$, l'application

$$(n, m, \lambda) \longmapsto (y, \eta, s) \mapsto e^{-is\lambda} \overline{\mathcal{W}(\widehat{w}, Y)}$$

fournit un paramétrage de la famille des représentations de Schrödinger. Il est aisé de vérifier que

$$-\Delta_{\mathbb{H}} \big(e^{is\lambda} \mathcal{W}(\widehat{w}, Y)\big) = 4|\lambda|(2|m|+1) e^{is\lambda} \mathcal{W}(\widehat{w}, Y) \tag{4.2}$$

ce qui est l'analogue dans notre cadre de la formule classique (1.2). Au prix de quelques intégrations par parties, on démontre que

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{H}),\ \big(\mathcal{F}_{\mathbb{H}}(-\Delta_{\mathbb{H}} f)\big)(n, m, \lambda) = 4|\lambda|(2m+1) \widehat{f}_{\mathbb{H}}(n, m, \lambda)\,. \tag{4.3}$$

L'ensemble $\widetilde{\mathbb{H}}$ semble un bon candidat pour être l'espace des fréquences du groupe d'Heisenberg. Faire de l'analyse sur cet espace (par exemple établir une formule d'inversion ou bien caractériser l'image des fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{H})$ nécessite la définition d'un certain nombre d'objets de base comme une mesure et une distance. Pour ce faire, commençons par donner un énoncé précis qui rende compte du principe qui veut que la régularité d'une fonction se traduise par des propriétés de décroissance de sa transformée de Fourier.

Proposition 4.1. *Si* f *est une fonction indéfiniment différentiable à support compact sur* $\mathbb{H}$*, alors, pour tout entier* N*, il existe une constante* C_N *telle que*

$$\forall \widehat{w} = (n, m, \lambda) \in \widetilde{\mathbb{H}},\ |\widehat{f}_{\mathbb{H}}(n, m, \lambda)| \leq C_N \big(1 + |\lambda|(n+m+1) + |n-m|\big)^{-N}.$$

Idées de la démonstration. La décroissance par rapport à $|\lambda|(m+1)$ résulte immédiatement de (4.2). La décroissance en $|n-m|$ s'obtient en utilisant les champs de vecteurs invariant à droite qui sont

$$\widetilde{\mathcal{Y}}_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \partial_y - 2\eta\partial_s\,,\ \widetilde{\mathcal{Y}}_2 \stackrel{\text{déf}}{=} \partial_\eta + 2y\partial_s \quad \text{et} \quad S \stackrel{\text{déf}}{=} \partial_s\,.$$

Pour les détails, nous renvoyons le lecteur à [3]. □

La mesure naturelle qui assure l'intégrabilité des grandes puissances négatives de la quantité $1+|\lambda|(n+m+1)+|n-m|$ est la mesure $d\widehat{w}$ définie par

$$\int_{\widetilde{\mathbb{H}}} \theta(\widehat{w})d\widehat{w} \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{R}} \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \theta(n,m,\lambda)|\lambda|d\lambda. \tag{4.4}$$

Ayant muni l'espace $\widetilde{\mathbb{H}}$ d'une mesure, on peut énoncer le théorème d'inversion de Fourier et de Fourier-Plancherel dans ce cadre.

Théorème 4.1. *Soit f une fonction indéfiniment différentiable à support compact sur $\mathbb{H}$. Alors, pour tout w dans $\mathbb{H}$, on a*

$$f(w) = \pi^{-2}\int_{\widetilde{\mathbb{H}}} e^{is\lambda}\mathcal{W}(\widehat{w},Y)\widehat{f}_{\mathbb{H}}(\widehat{w})\,d\widehat{w} \quad \text{et} \quad \|f\|^2_{L^2(\mathbb{H})} = \pi^{-2}\|\widehat{f}_{\mathbb{H}}\|^2_{L^2(\widetilde{\mathbb{H}})}. \tag{4.5}$$

Remarque 4.1. *Comme $\mathcal{W}(n,m,\lambda,0)=1$ si $n=m$ et 0 si $n\neq m$ on retrouve l'assertion (3.3) grâce à (4.5)*

Idées de la démonstration du théorème 4.1. Le point de départ de la démonstration est l'observation suivante : si f est indéfiniment différentiable à support compact, alors la changement de variable $x'=x-2y$ dans l'intégrale définissant $\mathcal{F}^{\mathbb{H}}(f)(\lambda)(\phi)(x)$ permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{\mathbb{H}}(f)(\lambda)(\phi)(x) &= \int_{\mathbb{H}} f(y,\eta,s)e^{-i\lambda s-2i\lambda\langle\eta,x-y\rangle}\phi(x-2y)\,dy\,d\eta\,ds\\
&= \int_{\mathbb{H}} f\Big(\frac{x-x'}{2},\eta,s\Big)e^{-i\lambda s}e^{-i\lambda\langle\eta,x+x'\rangle}\phi(x')\,dy\,d\eta\,ds\\
&= \frac{1}{2}\int_{T^\star\mathbb{R}} (\mathcal{F}_s f)\Big(\frac{x-x'}{2},\eta,\lambda\Big)e^{-i\lambda\langle\eta,x+x'\rangle}\phi(x')\,dx'd\eta\\
&= \frac{1}{2}\int_{T^\star\mathbb{R}} (\mathcal{F}_{\eta,s} f)\Big(\frac{x-x'}{2},x+x',\lambda\Big)e^{-i\lambda\langle\eta,x+x'\rangle}\phi(x')\,dx'd\eta. \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

Remarquons que nous venons de calculer le noyau de l'opérateur $\mathcal{F}^{\mathbb{H}}f(\lambda)$. Cette formule nous permet de décomposer $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}$ en le produit de trois opérations très simples, à savoir

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{\mathbb{H}} = \frac{1}{2}P\circ\Phi\circ\mathcal{F}_{\eta,s} \quad \text{avec}\\
&\Phi(F)(x,x',\lambda) \stackrel{\text{déf}}{=} F\Big(\frac{x-x'}{2},\lambda(x+x'),\lambda\Big) \quad \text{et} \qquad (4.7)\\
&(PG)(n,m,\lambda) \stackrel{\text{déf}}{=} \big(G(\cdot,\lambda)|H_{n,\lambda}\otimes H_{m,\lambda}\big)_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}
\end{aligned}$$

où $\mathcal{F}_{\eta,s}$ désigne la transformation de Fourier usuelle par rapport aux variables η et s. Remarquons que pour λ différent de 0, l'application

$$F(\cdot,\lambda)\longmapsto F(\psi)(\cdot,\lambda)$$

est un automorphisme de $L^2(\mathbb{R}^2)$ tel que

$$\|\Phi(F)(\cdot,\lambda)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = |\lambda|^{-1}\|F(\cdot,\lambda)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{4.8}$$

De plus l'inverse de Φ est donné explicitement par

$$\Phi^{-1}(F)(y,z,\lambda) = F\Big(y+\frac{z}{2\lambda},-y+\frac{z}{2\lambda},\lambda\Big)\cdot \tag{4.9}$$

Enfin, l'opérateur P est simplement l'opérateur qui à tout élément de $L^2(\mathbb{R}^2)$ associe ses coordionées dans la base orthonormale $\big(H_{n,\lambda}\otimes H_{m,\lambda}\big)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$. C'est bien sûr un isomorphisme isometrique de $L^2(\mathbb{R}^2)$ dans $\ell^2(\mathbb{N}^2)$ dont l'inverse est

$$(P^{-1}\theta)(x,x',\lambda) = \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^{2d}} \theta(n,m,\lambda)H_{n,\lambda}(x)H_{m,\lambda}(x'). \tag{4.10}$$

Le fait que

$$\mathcal{F}_{\mathbb{H}}^{-1} = 2\,\mathcal{F}_{\eta,s}^{-1}\circ\Phi^{-1}\circ P^{-1}.$$

permet de conclure la démonstration du théorème. □

Remarque 4.2. *La formule (4.2) jointe à la relation (4.5) de Fourier-Plancherel assure la sous-ellipticité de l'opérateur $\Delta_{\mathbb{H}}$ décrite par l'inégalité (2.5)*

Vu (4.1), il est naturel de définir la distance sur $\widetilde{\mathbb{H}}$ par

$$\widehat{d}(\widehat{w},\widehat{w}') \stackrel{\text{déf}}{=} \big|\lambda(n+m)-\lambda'(n'+m')\big| + \big|(n-m)-(n'-m')\big| + |\lambda-\lambda'|\,. \tag{4.11}$$

Nous pouvons maintenant énoncer un théorème qui, dans le cas de $\mathbb{R}^n$ n'est qu'une application immédiate du théorème de Lebesgue.

Théorème 4.2. *Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{H}$. Alors la transformation de Fourier $\widehat{f}_{\mathbb{H}}$ est uniformément continue sur $\widetilde{\mathbb{H}}$ muni de la distance $\widehat{d}$.*

Nous donnerons ultérieurement des indications de démonstration. Mais nous allons donner un corollaire qui scelle la définition de l'espace des fréquences pour le groupe d'Heisenberg.

Corollaire 4.1 (Riemann-Lebesgue)**.** *Pour toute fonction intégrable f sur $\mathbb{H}$, sa transformée de Fourier $\widehat{f}_{\mathbb{H}}$ s'étend en une fonction continue nulle à l'infini sur $(\widehat{\mathbb{H}},\widehat{d})$ que l'on définit comme le complété de $(\widetilde{\mathbb{H}},\widehat{d})$.*

C'est l'espace $\widehat{\mathbb{H}}$ que nous appelerons espace des fréquences de $\mathbb{H}$. Ceci nécessite bien sûr une description du complété.

Proposition 4.2. *L'espace complété $\widetilde{\mathbb{H}}$ pour la distance $\widehat{d}$ est l'ensemble $\widehat{\mathbb{H}}$ défini par*

$$\widehat{\mathbb{H}} \stackrel{\text{déf}}{=} \big(\mathbb{N}^2\times\mathbb{R}\setminus\{0\}\big)\cup\widehat{\mathbb{H}}_0 \quad \textit{with} \quad \widehat{\mathbb{H}}_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{R}\times\mathbb{Z}.$$

On définit sur $\widehat{\mathbb{H}}$, la distance (tounjours notée $\widehat{d}$) par

$$\widehat{d}((n,m,\lambda),(n',m',\lambda')) = \big|\lambda(n+m)-\lambda'(n'+m')\big| + \big|(m-n)-(m'-n')\big| + |\lambda-\lambda'|$$

$$\widehat{d}\big((n,m,\lambda),(\dot{x},k)\big) = \widehat{d}\big((\dot{x},k),(n,m,\lambda)\big) \stackrel{\text{déf}}{=} |\lambda(n+m)-\dot{x}| + |m-n-k| + |\lambda| \quad \textit{et}$$

$$\widehat{d}\big((\dot{x},k),(\dot{x}',k')\big) = |\dot{x}-\dot{x}'| + |k-k'|.$$

Démonstration. Considérons une suite de Cauchy $(n_p,m_p,\lambda_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $(\widetilde{\mathbb{H}},\widehat{d})$. Si p et p' sont suffisamment grand, alors $|(m_p-n_p)-(m_{p'}-n_{p'})|$ est inférieur à 1 et ainsi m_p-n_p est un entier constant que l'on désignera par k. De plus, la suite $(\lambda_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de réels qui converge donc vers un réel λ. Si λ est différent de 0 alors notre définition de $\widehat{d}$ implique que la suite $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang. Ainsi donc la suite (n_p,m_p,λ_p) converge vers $(n,n+k,\lambda)$.

Si $\lambda=0$ alors la suite de Cauchy $\big(\lambda_p(n_p+m_p)\big)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dot{x}$ in $\mathbb{R}$. Par définition de $\widehat{d}$, il est clair que $(n_p,m_p,\lambda_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $(\dot{x},k)$ dans $\widehat{\mathbb{H}}$.

Réciproquement, considérons un point $(\dot{x}, k)$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$ et montrons qu'il est limite au sens de $\widehat{d}$ d'une suite $(n_p, m_p, \lambda_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de points de $\widetilde{\mathbb{H}}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe deux suites d'entier positifs $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ and $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\dot{x} = \lim_{p\to\infty} \dot{x}_p \quad \text{avec} \quad \dot{x}_p \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{a_p}{b_p} \quad \text{et} \quad \lim_{p\to\infty} b_p = +\infty.$$

Écrivons que

$$\dot{x}_p = 2\lambda_p n_p \quad \text{avec} \quad \lambda_p \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2b_p}\,,\ n_p \stackrel{\text{déf}}{=} a_p b_p \quad \text{et} \quad m_p \stackrel{\text{déf}}{=} n_p + k.$$

Vu que la suite $(\lambda_p)_{p\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, nous avons que $\lim_{p\to\infty} \widehat{d}\big((n_p, n_p+k, \lambda_p), (\dot{x}, k)\big)$ converge vers 0. □

Idées de la démonstration du théorème 4.2. Grâce à un changement de variable, on se ramène à démontrer que

$$\widetilde{\mathcal{W}}(\widehat{w}, Y) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{2i\lambda\eta z} H_{n,\lambda}(2y+z) H_{m,\lambda}(z)\, dz$$

est uniformément continue. On développe en série $e^{2i\lambda\eta z}$ et on démontre que la série

$$\frac{\lambda^{\frac{k}{2}}\eta^k}{k!}\int_{\mathbb{R}} H_{n,\lambda}(2y+z)(M^k H_m)_\lambda(z)\, dz$$

est normalement convergente sur les bornés de $\widetilde{\mathbb{H}}$. On est donc ramené à démontrer que chaque terme

$$\frac{\lambda^{\frac{k}{2}}\eta^k}{k!}\int_{\mathbb{R}} H_{n,\lambda}(2y+z)(M^k H_m)_\lambda(z)\, dz$$

est continu. On développe $H_{n,\lambda}(2y+z)$ en série en y; on démontre que la série en ℓ

$$\eta^k(2y)^\ell \frac{\lambda^{\frac{k+\ell}{2}}}{k!\ell!}\big(\partial^\ell H_m \big| M^k H_m\big)_{L^2}$$

est convergence et l'on est de nouveau conduit à démontrer que chaque terme

$$\lambda^{\frac{k+\ell}{2}}\big(\partial^\ell H_m \big| M^k H_m\big)_{L^2} = \lambda^{\frac{k+\ell}{2}}\bigg(\Big(\frac{A-C}{2}\Big)^\ell H_m\Big|\Big(\frac{A+C}{2}\Big)^k H_m\bigg)_{L^2}$$

est continu. Ceci résulte du lemme suivant, démontré en détail dans [3].

Lemme 4.1. *On a, avec la convention $H_p = 0$ si p est strictement négatif,*

$$\bigg\|\lambda^{\frac{\ell}{2}}\Big(\frac{A\pm C}{2}\Big)^\ell H_n - \Big(\frac{\lambda n}{2}\Big)^{\frac{\ell}{2}}\sum_{\ell'=0}^{\ell}(\pm 1)^{\ell-\ell'}\binom{\ell}{\ell'} H_{n+\ell-2\ell'}\bigg\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0(\sqrt{|\lambda|}).$$

L'orthogonalité des fonctions d'Hermite permet alors de conclure la démonstration. □

Il est naturel de se poser la question de la description explicite de la restriction à $\widehat{\mathbb{H}}_0$ de la transformée de Fourier d'une fonction intégrable. Ceci est réalisé par le théorème suivant, dont la démonstration, faite en détail dans [3], repose sur le fait que la fonction $\mathcal{K}$ ci-dessous est la seule à vérifier une longue liste de propriétés provenant de la fonction $\mathcal{W}$ définie en (4.1).

Théorème 4.3. *La restriction à $\widehat{\mathbb{H}}_0$ de la transformée de Fourier $\widehat{f}_{\mathbb{H}}$ d'une fonction intégrable peut être décrite de la manière suivante:*

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{F}_{\mathbb{H}} f)_{|\widehat{\mathbb{H}}_0} = \mathcal{G}_{\mathbb{H}}(M_{\rm v} f) \quad \text{avec} \quad (\mathcal{G}_{\mathbb{H}} g)(\dot{x}, k) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{T^\star\mathbb{R}} \overline{\mathcal{K}}(\dot{x}, k, Y) g(Y) dY \quad \text{et} \\
&\mathcal{K}(\dot{x}, k, y, \eta) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\left(2|\dot{x}|^{\frac{1}{2}}(y \sin z + \eta \,\mathrm{sgn}(\dot{x}) \cos z) + kz\right)} dz
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

où $M_{\rm v} f(Y)$ désigne la moyenne verticale de f, c'est-à-dire $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(Y,s) ds$.

En d'autre termes, si l'on considère une suite $(n_p, \lambda_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ telle que

$$\lim_{p\to\infty} \lambda_p = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{p\to\infty} \lambda_p n_p = \frac{\dot{x}}{2}\,,$$

alors on a

$$\lim_{p\to\infty} \widehat{f}_{\mathbb{H}}(n_p, n_p + k, \lambda_p) = \int_{T^\star\mathbb{R}} \overline{\mathcal{K}}(\dot{x}, k, Y) f(Y, s)\, dY\, ds.$$

On est alors poussé à étudier la transformation $\mathcal{G}$ pour elle-même. À titre d'illustration, on peut citer le théorème suivant, démonté dans [3].

Théorème 4.4. *L'opérateur $\mathcal{G}_{\mathbb{H}}$ envoie continûment l'espace $L^1(T^\star\mathbb{R})$ to the space $\mathcal{C}_0(\widehat{\mathbb{H}}_0)$ des fonctions continues sur $\widehat{\mathbb{H}}_0$ tendant vers 0 à l'infini. De plus, pour tout couple (f,g) de fonctions de $L^1(T^\star\mathbb{R})$, on a*

$$\forall (\dot{x}, k) \in \widehat{\mathbb{H}}_0^d\,,\ \mathcal{G}_{\mathbb{H}}(f\star g)(\dot{x}, k) = \sum_{k'\in\mathbb{Z}^d} \mathcal{G}_{\mathbb{H}} f(\dot{x}, k-k')\, \mathcal{G}_{\mathbb{H}}(\dot{x}, k')\,. \tag{4.13}$$

Enfin, pour toute fonction g de $\mathcal{S}(T^\star\mathbb{R})$, nous avons la formule d'inversion

$$g(Y) = \frac{2}{\pi} \int_{\widehat{\mathbb{H}}_0^d} \mathcal{K}(\dot{x}, k, Y) \mathcal{G}_{\mathbb{H}} g(\dot{x}, k)\, d\mu_{\widehat{\mathbb{H}}_0^d}(\dot{x}, k)$$

et bien sûr l'identité de type Fourier-Plancherel

$$\forall g \in \mathcal{S}(T^\star\mathbb{R}^d)\,,\ \|g\|^2_{L^2(T^\star\mathbb{R}^d)} = \frac{2}{\pi} \|\mathcal{G}_{\mathbb{H}} g\|^2_{L^2(\widehat{\mathbb{H}}_0^d)}.$$

5. Extension aux distributions tempérées

L'objet de cette dernière section est de présenter de manière aussi succincte que possible l'extension de cette transformation de Fourier $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}$ aux distributions tempérées sur $\mathbb{H}$. Pour une construction complète et détaillée, nous renvoyons à [2]. Rappelons comment l'on procède dans le cas classique de l'espace $\mathbb{R}^n$.

On définit l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ comme étant l'espace des fonctions ϕ indéfiniment différentiables qui satisfont

$$\|\phi\|_k \stackrel{\text{déf}}{=} \max_{|\alpha+\beta|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \bigl|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\bigr| < \infty\,.$$

Le fait que

$$-\Delta_x\bigl(e^{-i\langle\xi,x\rangle}\bigr) = |\xi|^2\bigl(e^{-i\langle\xi,x\rangle}\bigr) \quad \text{et que} \quad |x|^2\bigl(e^{-i\langle\xi,x\rangle}\bigr) = -\Delta_\xi\bigl(e^{-i\langle\xi,x\rangle}\bigr) \tag{5.1}$$

assure que la transformation de Fourier envoie continûment $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même (pour la topologie issue des semi-normes ci-dessus). Alors par transposition, on pose, pour une distribution tempérée T

$$\langle \mathcal{F}T, \phi\rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \langle T, \widehat{\phi}\rangle.$$

Comme d'après le théorème de Fubini, il est aisé de constater (en identifiant $((\mathbb{R}^n)^\star)^\star$ à $\mathbb{R}^n$ que

$$\int_{(\mathbb{R}^n)^\star} \widehat{f}(\xi)g(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)dx$$

let que l'on a bien généralisé la transformation de Fourier à l'espace des distributions tempérées.

Nous allons tenter de faire de même pour la transformation de Fourier sur le groupe d'Heisenberg $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}$. Ceci implique la caractérisation de l'image de la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{H})$ par la transformation de Fourier sur le groupe d'Heisenberg $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}$. Il faut pour cela définir un concept de régularité sur l'espace $\widehat{\mathbb{H}}$. On procède en établissant une analogie avec l'assertion (5.1). Pour cela, posons les définitions suivantes.

Définition 5.1. *Soit θ une fonction sur $\widetilde{\mathbb{H}}$, on pose*

$$(\widehat{\Delta}\theta)(n,m,\lambda) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2|\lambda|}\Big(\sqrt{(n+1)(m+1)}\theta(n+1,m+1,\lambda) + \sqrt{nm}\theta(n-1,m-1,\lambda) \\ - (n+m+1)\theta(n,m,\lambda)\Big).$$

Si de plus θ est dérivable en λ, on pose

$$(\widehat{\mathcal{D}}\theta)(n,m,\lambda) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d\theta}{d\lambda}(n,m,\lambda) \\ + \frac{1}{2\lambda}\Big(\sqrt{(n+1)(m+1)}\theta(n+1,m+1,\lambda) + \sqrt{nm}\theta(n-1,m-1,\lambda) - \theta(n,m,\lambda)\Big).$$

On peut alors établir que

$$|Y|^2\mathcal{W}(\widehat{w},Y) = (-\widehat{\Delta}\mathcal{W}(\widehat{w},Y)) \quad \text{et} \quad \mathcal{D}(e^{is\lambda}\mathcal{W}(n,m,\lambda,Y) = is\mathcal{W}(n,m,\lambda,Y)$$

ce qui est l'analogue de la deuxième égalité de (5.1). Ceci permet de démonter que

$$\mathcal{F}_{\mathbb{H}} \circ M_{\mathrm{h}} = -\widehat{\Delta} \circ \mathcal{F}_{\mathbb{H}} \quad \text{et que} \quad \mathcal{F}_{\mathbb{H}} \circ M_{\mathrm{v}} = \widehat{\mathcal{D}} \circ \mathcal{F}_{\mathbb{H}} \quad \text{avec}$$
$$(M_{\mathrm{h}}f)(y,\eta,s) \stackrel{\text{déf}}{=} (y^2+\eta^2)f(y,\eta,s) \quad \text{et} \quad M_{\mathrm{v}}f(y,\eta,s) \stackrel{\text{déf}}{=} -isf(y,\eta,s).$$

L'espace $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ n'étant pas connexe, il est nécessaire de faire un lien entre les fréquences verticales positives et les fréquences verticales négatives. Ceci se fait grâce à l'élémentaire proposition suivante.

Proposition 5.1. *Définissons l'opérateur $\mathcal{P}$ par*

$$\mathcal{P}(f)(Y,s) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{s} \big(f(Y,s') - f(Y,-s')\big)ds'.$$

Cet opérateur $\mathcal{P}$ envoie continûment $\mathcal{S}(\mathbb{H})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{H})$ et

$$\mathcal{F}_{\mathbb{H}} \circ \mathcal{P} = \frac{1}{2i}\widehat{\Sigma}_0 \circ \mathcal{F}_{\mathbb{H}} \quad \text{avec} \quad (\widehat{\Sigma}_0\theta)(n,m,\lambda) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\theta(n,m,\lambda) - (-1)^{|n+m|}\theta(m,n,-\lambda)}{\lambda}\cdot$$

Définition 5.2. *Définissons l'espace $\mathcal{S}(\widetilde{\mathbb{H}}^d)$ comme l'espace des fonctions θ sur $\widetilde{\mathbb{H}}^d$ telles que*

- *pour tout couple d'entiers positifs (n,m), l'application $\lambda \longmapsto \theta(n,m,\lambda)$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$,*

- *pour tout entier positif N, les fonctions $\widehat{\Delta}^N\theta$, $\widehat{\mathcal{D}}^N\theta$ et $\widehat{\Sigma}_0\widehat{\mathcal{D}}^N\theta$ décroissent plus vite que toute puissance de $\widehat{d}_0$.*

Cet espace est muni des semi-normes

$$\|\theta\|_{N,\mathcal{S}(\widetilde{\mathbb{H}}^d)} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{\widehat{w}\in\widetilde{\mathbb{H}}^d} \bigl(1+\widehat{d}_0(\widehat{w})\bigr)^N \sum_{N'\leq N} \Bigl(|\widehat{\Delta}^{N'}\theta(\widehat{w})| + |\widehat{\mathcal{D}}^{N'}\theta(\widehat{w})| + |\widehat{\Sigma}_0\widehat{\mathcal{D}}^{N'}\theta(\widehat{w})|\Bigr)\cdot$$

Remarque 5.1. On peut remarquer que l'opérateur $\widehat{\Sigma}_0$ commute avec $\widehat{\Delta}$. Par contre, cet opérateur ne commute pas avec $\widehat{\mathcal{D}}$ car $[\widehat{\Sigma}_0, \widehat{\mathcal{D}}] = \lambda^{-1}\widehat{\Sigma}_0$. Ainsi donc, la place de l'opérateur $\widehat{\Sigma}_0$ dans la définition est importante.

Nous conviendrons de désigner par $\mathcal{S}(\widehat{\mathbb{H}})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\widehat{\mathbb{H}}$ dont la restriction à $\widetilde{\mathbb{H}}$ appartient à $\mathcal{S}(\widetilde{\mathbb{H}})$.

Donnons un exemple de fonctions de $\mathcal{S}(\widehat{\mathbb{H}})$. Considérons une fonction de $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (k,\ell)\in\mathbb{N}^2\,,\ \forall N\in\mathbb{N}\,,\ |\partial_r^k\partial_\lambda^\ell f(r,\lambda)| \leq C_{k,\ell,N}(1+r+|\lambda|)^{-N}.$$

La fonction

$$\theta(n,,m,\lambda) \stackrel{\text{déf}}{=} f(|\lambda|(2n+1),\lambda)\delta_{n=m}$$

est une fonction de $\mathcal{S}(\widehat{\mathbb{H}})$. Notons que le démonstration de ce point est non triviale (voir [2]). En effet l'étude de l'action itérée des opérateurs $\widehat{\Delta}$ et $\widehat{\mathcal{D}}$ nécessite des développements limités à un ordre arbitraire. En appliquant ce résultat à la fonction $f(r,\lambda) = e^{-r}$, on retrouve un résultat classique (voir [10] et [12]) qui affirme que la solution de l'équation de la chaleur sur le groupe d'Heisenberg, c'est-à-dire

$$\partial_t f - \Delta_{\mathbb{H}} f = 0 \quad \text{avec} \quad f_{|t=0} = f_0$$

s'écrit

$$f(t,\cdot) = f_0 \star h_t \quad \text{avec} \quad h_t(y,\eta,s) = \frac{1}{t^2} h\Bigl(\frac{y}{\sqrt{t}}, \frac{\eta}{\sqrt{t}}, \frac{s}{t}\Bigr)\cdot$$

où h est une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{H})$.[5]

Le théorème suivant assure que l'image de l'image de la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{H})$ par la transformation de Fourier sur le groupe d'Heisenberg $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}$ est bien l'espace $\mathcal{S}(\widehat{\mathbb{H}})$.

Théorème 5.1. *La transformation de Fourier $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}$ est un isomorphisme bi-continu entre les espaces $\mathcal{S}(\mathbb{H})$ and $\mathcal{S}(\widetilde{\mathbb{H}})$, dont l'inverse est donné par la formule*

$$\mathcal{F}_{\mathbb{H}}^{-1}\theta(Y,s) = \pi^2 \int_{\widehat{\mathbb{H}}} e^{is\lambda}\mathcal{W}(\widehat{w},Y)\theta(\widehat{w})\,d\widehat{w}. \tag{5.2}$$

On définit maintenant l'espace $\mathcal{S}'(\widehat{\mathbb{H}})$ des distributions tempérées sur l'espace $\widehat{\mathbb{H}}$ comme l'espace des formes linéaires continues sur $\widehat{\mathbb{H}}$. Donnons quelques exemples: les distributions associées aux fonctions localement intégrables qui ne croissent pas trop vite à l'infini. À titre d'illustration:

$$\langle T,\theta\rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n\in\ \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\bigl(|\lambda|(n+1)\bigr)^\gamma}\theta(n,n,\lambda)|\lambda|d\lambda\,.$$

[5] On peut calculer explicitement cette fonction. Il est à remarquer que le fait que la fonction h appartienne à $\mathcal{S}(\mathbb{H})$ ne saute pas aux yeux sur la formule.

Pour sortir du cadre des fonctions, on peut regarder le potentiel de simple couche sur $\widehat{\mathbb{H}}_0$ c'est-à-dire la mesure

$$\langle \mu_{\widehat{\mathbb{H}}_0}, \theta\rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \theta(\dot{x}, k) d\dot{x} \,. \tag{5.3}$$

S'il l'on définit, pour un rayon r dans $]0, 1[$, la sphère par

$$S_{\widehat{\mathbb{H}}}(r) = \big\{(n, n, \lambda) \in \widetilde{\mathbb{H}} \,/\, (|\lambda|(2n+1) = r^2\big\} \cup \{(\pm r, 0)\}\,,$$

on définit la mesure de surface sur la sphère par

$$\langle d\sigma_{S_{\widehat{\mathbb{H}}}}(r), \theta\rangle \stackrel{\text{déf}}{=} 2r^3 \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2n+1)^2} \Big(\theta\Big(n, n, \frac{r^2}{2n+1}\Big) + \theta\Big(n, n, -\frac{r^2}{2n+1}\Big)\Big)\,.$$

Remarquons que cette définition parait raisonnable car pour toute fonction continue supportée (au sens classique) dans la boule ouverte de centre $\widehat{0} \stackrel{\text{déf}}{=} (0,0) \in \widehat{\mathbb{H}}_0$ et de rayon 1, on a la formule de changement de variable en "coordonnées polaires"

$$\int_{\widehat{\mathbb{H}}} \theta(\widehat{w}) d\widehat{w} = \int_0^1 \langle d\sigma_{S_{\widehat{\mathbb{H}}}}(r), \theta\rangle dr\,.$$

Si l'on veut sortir des mesures, on peut démontrer que, pour réel γ de l'intervalle $]2, 7/2[$, et pour toute fonction θ dans $\mathcal{S}(\widehat{\mathbb{H}})$, la fonction

$$(n, m, \lambda) \longmapsto \delta_{n,m} \bigg(\frac{\theta(n, n, \lambda) + \theta(n, n, -\lambda) - 2\theta(\widehat{0})}{|\lambda|^\gamma (2n+1)^\gamma}\bigg),$$

est intégrable sur $\widehat{\mathbb{H}}$ et que l'expression

$$\Big\langle \mathrm{Pf}\Big(\frac{1}{|\lambda|^\gamma (2n+1)^\gamma}\Big), \theta\Big\rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \bigg(\frac{\theta(n, n, \lambda) + \theta(n, n, -\lambda) - 2\theta(\widehat{0})}{|\lambda|^\gamma (2n+1)^\gamma}\bigg) \,|\lambda| d\lambda$$

définie une distribution sur $\widehat{\mathbb{H}}$. On peut observer que la "restriction" de cette distribution à $\widetilde{\mathbb{H}}$ est la fonction $\widehat{w} \mapsto |\lambda|^\gamma (2n+1)^{-\gamma}$ au sens où pour toute fonction θ de $\mathcal{S}(\widehat{\mathbb{H}})$ identiquement nulle pour λ assez proche de 0, nous avons

$$\Big\langle \mathrm{Pf}\Big(\frac{1}{|\lambda|^\gamma (2n+1)^\gamma}\Big), \theta\Big\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|\lambda|^\gamma (2n+1)^\gamma} \theta(n, n, \lambda) |\lambda| d\lambda\,.$$

Pour étendre la transformation de Fourier à l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{H})$, on procède comme dans le cas classique par dualité. Ceci repose sur la définition de la forme bilinéaire

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{array}{ccc} L^1(\mathbb{R}^n) \times L^1((\mathbb{R}^n)^\star) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (f, \theta) & \longmapsto & \displaystyle\int_{T^\star\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle \xi, x\rangle} \theta(\xi)\, dx\, d\xi, \end{array} \right. \tag{5.4}$$

avec $T^\star\mathbb{R}^n \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^\star$. Le théorème de Fourier-Plancherel assure que l'on peut étendre continûment cette forme bilinéaire à $L^2(\mathbb{R}^n) \times L^2((\mathbb{R}^n)^\star)$. Le théorème de Fubini assure que

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(f, \phi) = \int_{(\mathbb{R}^n)^\star} \widehat{f}(\xi) \theta(\xi) \xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \widehat{\theta}(x) dx\,. \tag{5.5}$$

Le fait que la transformation de Fourier (qui apparait comme symétrique grâce à la formule ci-dessus) envoie la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans elle-même (en identifiant $\mathbb{R}^n$ et $(\mathbb{R}^n)^\star$), on définit la transformation de Fourier sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ par

$$\forall \phi \,\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,,\ \langle \mathcal{F}_{\mathbb{R}} T, \phi\rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{S}((\mathbb{R}^n)^\star)} \stackrel{\text{déf}}{=} \langle T, \mathcal{F}_{\mathbb{R}} \phi\rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{S}((\mathbb{R}^n)^\star)}. \tag{5.6}$$

Lorsque la distribution T est associé à une fonction intégrable, la formule (5.5) assure que la définition ci-dessus coïncident avec la définition élémentaire 1.1.

Adaptons ce procédé à la transformation de Fourier sur le groupe d'Heisenberg. Pour cela on définit la forme bilinéaire

$$
(5.7) \qquad \mathcal{B}_{\mathbb{H}} \left\{ \begin{array}{ccc} L^1(\mathbb{H}) \times L^1(\widehat{\mathbb{H}}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (f,\theta) & \longmapsto & \displaystyle\int_{\mathbb{H}\times\widehat{\mathbb{H}}} f(w) e^{-is\lambda} \overline{\mathcal{W}}(\widehat{w}, Y)\theta(\widehat{w})\, dw\, d\widehat{w}. \end{array} \right.
$$

Comme dans la cas de la transformation de Fourier usuelle sur $\mathbb{R}^n$, le théorème de Fourier-Plancherel 4.1 permet d'étendre à l'espace $L^2(\mathbb{H}) \times L^2(\widehat{\mathbb{H}})$ la forme bilinéaire $\mathcal{B}_{\mathbb{H}}$. Posons maintenant

$$
(5.8) \qquad {}^t\mathcal{F}_{\mathbb{H}}\theta(y,\eta,s) \stackrel{\text{déf}}{=} \pi^2 (\mathcal{F}_{\mathbb{H}}^{-1}\theta)(y,-\eta,-s),
$$

Le théorème 5.1 assure que ${}^t\mathcal{F}_{\mathbb{H}}$ envoie continûment $\mathcal{S}(\widehat{\mathbb{H}})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{H})$. De plus, le théorème de Fubini assure que

$$
(5.9) \qquad \mathcal{B}_{\mathbb{H}}(f,\theta) = \int_{\widehat{\mathbb{H}}^d} \mathcal{F}_{\mathbb{H}} f(w)\, \theta(\widehat{w})\, d\widehat{w} = \int_{\mathbb{H}^d} f(w)\, {}^t\mathcal{F}_{\mathbb{H}}\theta(w)\, dw
$$

On peut comme précédemment étendre la transformation de Fourier $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}$ aux distributions tempérées par la formule

$$
(5.10) \qquad \langle \mathcal{F}_{\mathbb{H}} T, \theta \rangle_{\mathcal{S}'(\widehat{\mathbb{H}}^d)\times\mathcal{S}(\widehat{\mathbb{H}}^d)} \stackrel{\text{déf}}{=} \langle T, {}^t\mathcal{F}_{\mathbb{H}}\theta\rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{H}^d)\times\mathcal{S}(\mathbb{H}^d)},
$$

la formule (5.9) assurant que lorsque la distribution tempérée T est associé à une fonciton intégrable, on retrouve bien la définition 4.1. Comme première illustration, nous énoncer la proposition suivante.

Proposition 5.2. *Nous avons*

$$
\mathcal{F}_{\mathbb{H}}(\delta_0) = \mathbf{1}_{\{(n,m,\lambda)\,/\,n=m\}} \quad \textit{and} \quad \mathcal{F}_{\mathbb{H}}(\mathbf{1}) = \pi^2 \delta_{\widehat{0}}\,,
$$

ce qui signifie que pour toute fonction θ de $\mathcal{S}(\widehat{\mathbb{H}})$,

$$
\langle \mathcal{F}_{\mathbb{H}}(\delta_0), \theta\rangle_{\mathcal{S}'(\widehat{\mathbb{H}})\times\mathcal{S}(\widehat{\mathbb{H}})} = \sum_{n\in\mathbb{N}^d} \int_{\mathbb{R}} \theta(n,n,\lambda)|\lambda| d\lambda \quad \textit{and} \quad \langle \mathcal{F}_{\mathbb{H}}(\mathbf{1}), \theta\rangle_{\mathcal{S}'(\widehat{\mathbb{H}})\times\mathcal{S}(\widehat{\mathbb{H}})} = \pi^2\theta(\widehat{0})\,.
$$

Démonstration. Pour démontrer la première relation, observons que

$$
\langle \mathcal{F}_{\mathbb{H}}(\delta_0), \theta\rangle_{\mathcal{S}'(\widehat{\mathbb{H}})\times\mathcal{S}(\widehat{\mathbb{H}})} = \langle \delta_0, {}^t\mathcal{F}_{\mathbb{H}}(\theta)\rangle_{\mathcal{S}'(\widehat{\mathbb{H}})\times\mathcal{S}(\widehat{\mathbb{H}})} = {}^t\mathcal{F}_{\mathbb{H}}(\theta)(0).
$$

Comme $\mathcal{W}(n,m,\lambda,0) = (H_{m,\lambda}|H_{n,\lambda})_{L^2}$ et que la famille $(H_{n,\lambda})_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée, on trouve le résultat d'après la définition (5.8) de ${}^t\mathcal{F}_{\mathbb{H}}$.

Pour démontrer la second relation, on trouve d'après (5.8) que

$$
(5.11) \qquad \langle \mathcal{F}_{\mathbb{H}}(\mathbf{1}), \theta\rangle_{\mathcal{S}'(\widehat{\mathbb{H}})\times\mathcal{S}(\widehat{\mathbb{H}})} = \pi^2 \int_{\mathbb{H}^d} (\mathcal{F}_{\mathbb{H}}^{-1}\theta)(y,-\eta,-s)\, dy\, d\eta\, ds.
$$

Comme $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}^{-1}\theta$appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{H}^d)$, le terme de droite est bien définie. De plus, le théorème 4.3 assure que $\mathcal{F}_{\mathbb{H}} f(\widehat{0}) = \int_{\mathbb{H}^d} f(w)\, dw$ pour toute fonction f intégrable sur $\mathbb{H}$. Ainsi on trouve que

$$
\langle \mathcal{F}_{\mathbb{H}}(\mathbf{1}), \theta\rangle_{\mathcal{S}'(\widehat{\mathbb{H}})\times\mathcal{S}(\widehat{\mathbb{H}})} = \pi^2 \mathcal{F}_{\mathbb{H}}\big(\mathcal{F}_{\mathbb{H}}^{-1}\theta\big)(\widehat{0}) = \pi^2\theta(\widehat{0})
$$

ce qui conclut la démonstration de la proposition. □

Pour conclure ce texte, énonçons le résultat qui décrit la transformée de Fourier des fonctions qui ne dépend pas de la variable verticale s. Ce résultat est démontré en détail dans [2] et [3].

Théorème 5.2. *Soit g une fonction de $L^1(\mathbb{R}^2)$. Alors on a*

$$\mathcal{F}_{\mathbb{H}}(g \otimes \mathbf{1}) = 2\pi(\mathcal{G}_{\mathbb{H}} g)\mu_{\widehat{\mathbb{H}}_0^d}$$

où $\mathcal{G}_{\mathbb{H}}$ est la transformation définie dans l'énoncé du théorème 4.4 et $\mu_{\widehat{\mathbb{H}}_0}$ le potentiel de simple couche sur $\widehat{\mathbb{H}}_0$ défini par (5.3).

References

[1] H. Bahouri, J.-Y. Chemin et R. Danchin, *Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **343**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.

[2] H. Bahouri, J.-Y. Chemin et R. Danchin, Tempered distributions and Fourier transform on the Heisenberg group, *Annales Henri Lebesgue*, **1**, 2018, pages 1-46.

[3] H. Bahouri, J.-Y. Chemin et R. Danchin, A frequency space for the Heisenberg group, *Annales de l'Institut Fourier*, 2019, **69**, pages 365–407.

[4] H. Bahouri, C. Fermanian-Kammerer and I. Gallagher: *Phase-space analysis and pseudodifferential calculus on the Heisenberg group*, Astérisque, **340**, 2012.

[5] R. Beals and P. Greiner: *Calculus on Heisenberg manifolds*, Annals de Mathematics Studies, **119**, Princeton University Press, 1988.

[6] (avec C.-J. Xu), Inclusions de Sobolev en calcul de Weyl-Hörmander et systèmes sous-elliptiques, *Annales de l'École Normale Supérieure*, **30**, 1997, pages 719–751.

[7] L.-J. Corwin and F.-P. Greenleaf: Representations de nilpotent Lie groups and their applications, Part 1: Basic theory and examples, *Cambridge studies in advanced Mathematics*, **18** (1990).

[8] J. Faraut and K. Harzallah: *Deux cours d'analyse harmonique*, École d'Été d'analyse harmonique de Tunis. Progress in Mathematics, Birkhäuser, 1984.

[9] G. B. Folland: *Harmonic Analysis in Phase Space*, Annals de Mathematics Studies, **122**, Princeton University Press, 1989.

[10] B. Gaveau: Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous-elliptiques sur certains groupes nilpotents, *Acta Mathematica*, **139**, 1977, pages 95–153.

[11] D. Geller: Fourier analysis on the Heisenberg group I, the Schwartz space, *Journal of Functional Analysis*, **36**, 1980, pages 205–254.

[12] A. Hulanicki: A functional calculus for Rockland operators on nilpotent Lie groups, *Studia Mathematica*, **78**, 1984, pages 253–266.

[13] N.Lerner, *Fonctions classiques*, https://webusers.imj-prg.fr/ nicolas.lerner/classique-m1-lerner.pdf

[14] W. Rudin: *Fourier analysis on groups.* Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, **12**, New York–London, 1962.

[15] E. M. Stein: *Harmonic Analysis*, Princeton University Press, 1993.

[16] M. E. Taylor: *Noncommutative Harmonic Analysis, Mathematical survey and monographs*, **22**, American Mathematical Society Providence RI, 1986.

[17] S. Thangavelu: Harmonic analysis on the Heisenberg group, *Progress in Mathematics, Birkhaüser*, **159**, 1998.

(J.-Y. Chemin) Laboratoire J.-L. Lions, UMR 7598, Sorbonne Université, Boîte 187, 75232 Paris Cedex 05, FRANCE

Email address: `chemin@ann.jussieu.fr`