# Groupes, Géométrie, Logique

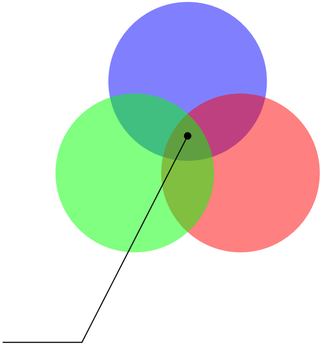
Adrien Deloro

Sorbonne Université

10 avril 2018

# Vous êtes ici

L'exposé mélange trois domaines :



- la géométrie algébrique
  (l'étude des solutions de polynômes)
- la théorie des groupes
  (avec une bonne tendance groupes finis)
- la théorie des modèles
  (c'est une branche de la logique)

Nom officiel : *groupes de rang de Morley fini*
MSC 2010 : 20F11

# Dans cette partie

# Groupes de matrices

- Observation :

  *tous les mathématiciens connaissent les groupes de matrices, parce que les groupes de matrices sont partout.*

- Un *groupe de matrices* est un sous-groupe/sous-quotient de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ « donné par des équations polynomiales » ($\mathbb{K}$ corps quelconque).

  Un sous-quotient de $G$ est de la forme $H/K$, avec $K \trianglelefteq H \leq G$.

- Ex. $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/\{\lambda \, \mathrm{Id} : \lambda \in \mathbb{K}^\times\}$.

  Ex. $O_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) : M \cdot M^t = \mathrm{Id}\}$.

  Terminologie standard : « groupes de type Lie ».

- Thèse de l'exposé :

  *il existe une « théorie des groupes de matrices »*

# Pas l'algèbre linéaire !

Thèse de l'exposé :

*il existe une « théorie des groupes de matrices »*

**Ce n'est *pas* l'algèbre linéaire.**

En algèbre linéaire on utilise *beaucoup plus de structure* que la loi de groupe, par exemple la $\mathbb{K}$-algèbre environnante.

Pour vous en convaincre :

*décrivez les éléments semi-simples (=diagonalisables), les éléments unipotents* ($\mathrm{Id} +$*nilpotents*) *de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *en termes purement groupe-théoriques (très formateur !)*

---

Mais je dois d'abord expliquer l'omniprésence :

*les groupes de matrices sont partout*

# Groupes et géométries

Deux grandes sources de groupes :

- théorie des nombres (Galois) ;
- géométries linéaires ; transformations continues (Klein, Lie).

Étonnant ( ?) : cela débouche sur les mêmes objets algébriques.
L'exposé se concentre sur les groupes associés aux géométries linéaires (groupes « de type Lie » classiques ou exceptionnels).
Un mot d'histoire :

- Émergence : Klein, Lie — en lien avec la géométrie différentielle
- Premiers analogues finis dès Jordan
- Début $\mathrm{XX}^{\mathrm{e}}$ : groupes algébriques
- Puis Chevalley (1940 sqq) fait le lien entre géo. alg $\leftrightarrow$ cas fini

Ces groupes « de type Lie » sont étudiés par plusieurs théories.

# Erlangen

On doit à Felix Klein l'idée suivante (1872) :

*L'algèbre explique la géométrie,*
*car les structures contrôlent les formes*

F. Klein

Grâce à la théorie des groupes Klein a pu fondre « les géometries »
(projective, orthogonale, etc.)
dans l'étude de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et de ses sous-quotients
(ex. $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{K})$, $O_n(\mathbb{K})$, etc.).
Dès 1930 ces groupes de matrices étaient déjà « classiques » pour H. Weyl.
On peut les aborder par (au moins) trois angles.

# Groupes de Lie

Un *groupe de Lie* est un groupe muni d'une structure de variété (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) compatible. Sophus Lie a étudié systématiquement ces *Transformationsgruppen* (années 1870).

S. Lie

Les groupes de Lie simples ont été classifiés par É. Cartan (1894) : il s'avère que ce sont des groupes de matrices (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

## Remarque

Outre les « groupes classiques » on découvrit ainsi de nouveaux objets : les « groupes exceptionnels » $E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$.

# Groupes algébriques

Un *groupe algébrique* est un groupe muni d'une structure de variété algébrique compatible.
Claude Chevalley a classifié les groupes algébriques simples.

C. Chevalley

Chevalley a donc reproduit la classification de Cartan, mais sur des corps algébriquement clos arbitraires.
Ce faisant il a ouvert en grand la porte aux analogues finis (déjà présents chez C. Jordan).

# Groupes simples finis

## Classification des groupes simples finis

Un groupe simple fini est un groupe :

- cyclique $C_p$ ($p$ premier) ;
- alterné $\mathrm{Alt}_n$ ($n \geq 5$) ;
- Chevalley/de type Lie (analogue finitaire du cas Lie, + « twists ») ;
- sporadique (26 exceptions).

## Attention !

Les groupes « exceptionnels » $E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$ *sont* de type Lie.
Les groupes « sporadiques » ne proviennent d'aucune géométrie connue.

CGSF : annoncée dans les années 80, vraiment finie 20 ans plus tard.
Démonstration : 10 000 pages.

# Un théorème commun ?

Les trois résultats de classification mentionnés ont la même forme :

**Théorème-type**

Un groupe simple pas dégueu est un groupe de matrices déjà connu.

**Question centrale**

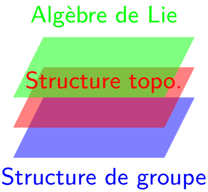
Qu'ont de commun les groupes de Lie, les groupes algébriques, et les groupes finis (à part d'être des groupes) ?

Explorons donc les divers niveaux de structure mathématique.

# Méthodes Lie-théoriques

Un groupe de Lie est un groupe muni d'une structure de variété compatible.

- Grâce aux $\varepsilon$ on peut introduire des infinitésimaux — et linéariser le groupe.
- L'espace tangent porte une structure algébrique nouvelle : l'*algèbre de Lie*.
- On classifie les algèbres de Lie de dim. finie ;
- puis les groupes associés.

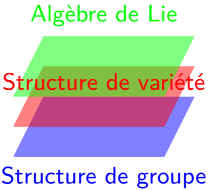



Mais c'est limité à $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

# Méthodes algébriques

Un groupe algébrique est un groupe muni d'une structure de variété algébrique compatible.

- On dispose d'une topologie et d'une dimension (Zariski).
- En fait un groupe algébrique est un *foncteur*. On peut changer le système de coordonnées et considérer $\mathrm{GL}_n(A)$ avec $A = \mathbb{K}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$. Cette fonctorialité permet de capturer algébriquement les infinitésimaux,
- et donc l'algèbre de Lie.




Mais cela postule une fonctorialité bien étrangère à la structure de groupe.

# Méthodes en théorie des groupes finis

La théorie des groupes finis utilise :

- la théorie de Sylow, qui fait grand emploi du comptage ;
- la théorie des caractères (développée par Frobenius), mais celle-ci « sort » du groupe et l'on peut la considérer peu effective ;
- les « involutions » (éléments d'ordre 2) et leurs centralisateurs ;
- *beaucoup* de patience.

**Observation**

L'ordre d'un groupe fini permet des récurrences ; cela semble vaguement réminiscent d'une dimension.

# La question centrale revisitée

Et si la classification commune des groupes de Lie simples, des groupes algébriques simples, et des groupes simples finis pouvait être expliquée en termes de dimension ?

> *La théorie des groupes de matrices est la théorie des groupes munis d'une dimension décente. Elle offre un socle commun aux groupes de Lie, aux groupes algébriques, et aux groupes finis.*

Mais je dois expliquer le concept de dimension *sans référence à une topologie*. Passons par la théorie des modèles.

# Dans cette partie

# Ensembles définissables

## Définition

Soit $G$ un groupe. Un sous-ensemble $X \subseteq G$ est définissable si l'on peut le décrire par une formule logique ne mentionnant que la loi de groupe et des éléments du groupe.

Une telle formule emploie $\exists, \forall$, des négations, conjonctions, et disjonctions.
La formule logique de base est de la forme :

$$\forall x_1 \ldots \forall x_m \exists y_1 \ldots \exists y_m \forall z_1 \ldots \forall z_p \; w = 1$$

où $w$ est un *mot*, ex. $x_2^{-1} \cdot y_3 \cdot x_2 \cdot y_1^{-1}$.
Puis intersections et unions finies, complémentaires, projetés.

## Limites

- Pas de « il y a un sous-ensemble » ni de « pour toute fonction ».
- On ne peut pas quantifier sur les entiers (sauf si $G = \mathbb{Z}$).

# Exemples

- Tout ensemble fini est définissable : $x = g_1 \vee \cdots \vee x = g_n$.
- Le centralisateur de $g \in G$ est définissable : $C_G(g) = \{x : gx = xg\}$.
- Marche encore pour $C_G(X)$ avec $X$ fini, mais a priori plus si $X$ est infini. Si $X$ est définissable, $C_G(X)$ l'est aussi.
- Si $H \leq G$ est définissable, $N_G(H) = \{x : xH = Hx\}$ l'est aussi.
- Le dérivé $G'$ n'a pas de raison d'être définissable.

# La classe définissable

En fait il faut un peu élargir la définition pour avoir :

• plus de relations • les produits cartésiens • les quotients

## Définition (la bonne)

Les définissables de $G$ sont les quotients des sous-ensembles définissables de $G^n$ par les relations d'équivalences définissables.

(où « définissable » est la notion précédente).

Si $K \trianglelefteq H$ sont définissables, le groupe quotient $H/K$ est définissable.

## Sur la terminologie

Ces parties définissables généralisent les *constructibles* de la géo. alg.

- Pas de topologie en vue.
- La théorie des modèles hiérarchise les structures selon la complexité combinatoire de leur classe définissable.

# Dimension

Un groupe *a une dimension* si chaque partie définissable possède une dimension entière vérifiant certains axiomes comme :

- $\dim A = 0$ ssi $A$ est fini ;
- $\dim A \geq n + 1$ ssi $A$ contient une infinité de sous-ensembles définissables de dimension $\geq n$ ;
- $\dim A \times B = \dim A + \dim B$ ;
- etc.

**Sur la terminologie**

Nom officiel : « groupes de rang de Morley fini »

(Nous reviendrons sur ce nom.)

# Exemple-clef

**Fait**

Un groupe de matrices sur un corps alg. clos est un groupe à dimension.

**Attention !**

Un groupe de Lie *réel* n'est *pas* un groupe à dimension en ce sens.

Donc je ne parlerai ni de $U_n(\mathbb{R})$ ni de $O_n(\mathbb{R})$. Mais de $O_n(\mathbb{C})$, oui.

La complexité logique de $\mathbb{R}$ n'est pas aussi triviale que celle de $\mathbb{C}$ ; en fait :

**Théorème (Macintyre)**

*Un corps à dimension est soit fini, soit alg. clos.*

Accrédite l'idée que les « structures à dimension » sont liées à la géométrie algébrique.

# Erlangen reconquis

F. Klein :

*L'algèbre explique la géométrie,*
*car les structures contrôlent les formes.*

Et la théorie des modèles :

*La logique explique l'algèbre,*
*car les théories contrôlent les structures.*

La th. des groupes offrait une langue commune aux géométries classiques.

De même, la th. des modèles propose une langue commune aux structures « de complexité modérée » (géo. alg. close, semi-alg., $p$-adique...)

---

Cet exposé reste en alg. clos. Ici commencent deux diapo plus obscures.

# Catégoricité*

- Une *théorie* $T$ est un ensemble de formules logiques.
  $\{\forall x \forall y \forall z\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \quad \forall x\ x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \quad \forall x\ x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1\}$
- Un *modèle* de $T$ est une structure algébrique satisfaisant ses axiomes.
- $T$ est $\kappa$*-catégorique* si tous ses modèles de cardinal $\kappa$ sont isomorphes.
  Paraphrase : $T$ est $\kappa$-catégorique si elle (à isom. près) un unique modèle de cardinal $\kappa$. La catégoricité est un phénomène très sympathique.
- La théorie du corps $\mathbb{C}$ est $\mathfrak{c}$-catégorique ($\mathfrak{c}$=le continu).
- Tout corps alg. clos, tout groupe *simple* de matrices sur un tel corps.
- Mais ni $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ ni $\mathbb{R}$ ne sont $\mathfrak{c}$-catégoriques.
- Zilber a conjecturé jadis : géo. alg. = étude de la catégoricité
  (pas entièrement vrai, mais un peu. . . et tellement fascinant.

# Le théorème de Morley*

*Déf. $T$ est $\kappa$-catégorique si elle possède un unique modèle de cardinal $\kappa$.*

**Théorème (Morley, années 60)**

*$T$ est $\kappa$-catégorique ssi elle est $\lambda$-catégorique pour tous $\kappa, \lambda$ non dénombrables.*

- Ce fut le renouveau de la théorie des modèles ($\neq$ algèbre universelle)
- Morley dans sa preuve introduisit une certaine forme de dimension, appelée *rang de Morley* depuis.
- Dans les années 1970 Baldwin a compris que toute théorie $\kappa$-catégorique est de rang de Morley fini.
- Puis Zilber a montré que tout groupe simple de rang de Morley fini est $\kappa$-catégorique !

# Dans cette partie

# On reprend !

- Les groupes de Lie, les groupes algébriques, les groupes finis, satisfont le même résultat de classification simple.
- Tout ce qu'ils ont en commun, c'est la présence d'une dimension.
- La théorie des modèles fournit une notion abstraite (mais pertinente) de dimension.
- Les groupes de matrices sur des corps alg. clos sont des groupes à dimension.

*Les groupes à dimension sont une invention des théoriciens des modèles en pleine théorie des modèles, qui ont ainsi redécouvert la géométrie algébrique.*

# La conjecture principale

**Conjecture (Cherlin, Zilber)**

Un groupe simple à dimension est soit fini, soit un groupe de matrices sur un corps alg. clos.

Note. C'est un cas particulier de la grande conjecture modèle-théorique (réfutée) : « géo. alg. = étude de la catégoricité ».

**Faisceau de preuve**

- Pas de contre-exemple connu
  (les contre-exemples sont nilpotents, au mieux résolubles)
- les groupes à dimension ont tendance à définir des corps alg. clos
- un certain nombre de résultats classiques sur les groupes alg. peuvent être adaptés.

# À quoi bon ?

**Conjecture (Cherlin, Zilber)**

Un groupe simple à dimension est soit fini, soit un groupe de matrices sur un corps alg. clos.

Ça m'intéresse parce que :

- c'est beau ;
- ça explique la géométrie algébrique d'un point de vue élémentaire ;
- ça suggère une épure de CGSF.

# Boîte à outils

## Conjecture (Cherlin, Zilber)

Un groupe simple à dimension est soit fini, soit un groupe de matrices sur un corps alg. clos.

On fait comment ?

- ~~méthodes infinitésimales~~
- ~~approche fonctorielle~~
- ~~théorie des caractères~~
- comptage (très limité — puisque restreint à la dimension)
- théorie de Sylow (limitée)

Allez, on se lance.

# L'approche naïve

Rien n'est aussi naïf qu'une bonne vieille récurrence.

**Théorème (Reineke, 1975)**

*Un groupe de dimension* 1 *est abélien-par-fini.*

**Démonstration.**

Sinon, créer une involution ($x^2 = 1$). Et une contradiction. □

**Théorème (Cherlin, 1979)**

*Un groupe de dimension* 2 *est résoluble-par-fini.*

**Démonstration.**

Sinon, créer une involution. Et une contradiction. □

# Et en rang 3 ?

**Théorème (Cherlin, 1979)**

*Un groupe simple de dimension* 3 *est* $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ *ou pas.*

**Démonstration.**

Si on a la décomposition de Bruhat tout va bien. Mais sinon ? □

**Théorème (Nesin, 1989)**

*Si* $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K}) \not\simeq G$ *simple de dimension* 3, *alors il n'y a pas d'involutions.*

**Théorème (Frécon, 2016)**

*Si* $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K}) \not\simeq G$ *simple de dimension* 3 *n'a pas d'involutions, alors il y a une contradiction.*

Seule conclusion légitime : il faut faire une fixette sur les involutions.

# L'orthodoxie méthodologique

Importons donc des méthodes de groupes finis :

*Les groupes de rang de Morley fini sont :*

- *historiquement, des groupes en théorie des modèles ;*
- *conjecturellement, des groupes algébriques ;*
- *méthodologiquement, des groupes finis.*

CGSF utilise Sylow et les centralisateurs d'involutions.

**Fait**

Les 2-sous-groupes de Sylow sont conjugués, et de la forme : (exposant fini$*$divisible)-par-fini.

Ouvert pour $p > 2$.

# Résultats positifs

**Théorème (Altınel, Borovik, Cherlin, 2008)**

*Soit $G$ un groupe simple infini à dimension. On suppose que $G$ contient une copie de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$. Alors $G$ est un groupe de matrices sur un corps alg. clos.*

- Preuve : 500 pages ;
- $500 \ll 10000$ — c'est donc une épure de CGSF.
- L'hypothèse ressemble à une hypothèse « de caractéristique 2 ».
- Et dans les autres cas ?

# Obstacles

**Théorème (Feit-Thompson, 1963)**

*Tout groupe simple fini non-abélien possède une involution.*

- Démonstration : 250 pages (note : vérifiée en COQ !)
- Passe par la théorie des caractères (absente en logique).

**Question quadragénaire**

Tout groupe simple infini à dimension possède-t-il une involution ?